

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК



Інтернет-
підтримка

А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія 8



загальноосвітня
і допрофільна підготовка

А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2016

УДК [514:37.016](075.3)
 ББК 22.151.0+я721
 € 80

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
 (наказ Міністерства освіти і науки України від 10.05.2016 р. № 491)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

O. A. Герус, учитель комунального закладу «Луцький навчально-виховний комплекс “загальноосвітня школа І–ІІІ ступенів № 22 — ліцеї” Луцької міської ради»,
 учитель-методист;

Я. Й. Гевко, головний спеціаліст з питань загальної освіти відділу освіти
 виконавчих органів Дрогобицької міської ради Львівської області, учитель-методист
 Дрогобицької загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 1 ім. Івана Франка;

O. A. Тилищак, доцент кафедри алгебри ДВНЗ «Ужгородський
 національний університет», канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти:

С. П. Нелін, професор кафедри математики Харківського національного педагогічного
 університету ім. Г. С. Сковороди, канд. пед. наук;

О. М. Роганін, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії Пісочинського колегіуму
 Харківської районної ради Харківської області, учитель-методист;

I. С. Маркова, головний редактор науково-методичного журналу
 «Математика в школах України»

Єршова А. П.

€ 80 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова,
 В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х. : Вид-во
 «Ранок», 2016. — 256 с. : іл.

ISBN 978-617-09-2854-2

УДК [514:37.016](075.3)
 ББК 22.151.0+я721

ІНТЕРНЕТ-ПІДТРИМКА

Для користування
 електронними додатками
 до підручника увійдіть на сайт
interactive.ranok.com.ua



Служба технічної підтримки:

тел. (057) 719-48-65, (098) 037-54-68
 (понеділок–п’ятниця з 10:00 до 18:00)
 e-mail: interactive@ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-2854-2

© Єршова А. П., Голобородько В. В.,
 Крижановський О. Ф., Єршов С. В., 2016
 © Хорошенко В. Д., ілюстрації, 2016
 © ТОВ Видавництво «Ранок», 2016

Любі друзі!

У світі геометрії ви вже не почуваете себе чужинцями: у сьомому класі ви познайомилися з багатьма важливими етапами її розвитку, почали оволодівати її мовою та опановувати її закони. Але геометрію недарма вважають дивовижною наукою: щоразу нова й непередбачувана, вона відкриває свої найкоштовніші скарби лише тому, хто пройнявся її духом і прагне не зупинятися на досягнутому.

У шкільному курсі геометрії можна умовно виділити декілька напрямів. На початковому етапі переважає «**геометрія доведень**» — ви вперше зустрілися з поняттям доведення, оволоділи його методами й логікою, навчилися отримувати з одних тверджень інші, обґрунтовувати свої висновки. Протягом цього навчального року чільне місце буде відведено «**геометрії обчислень**». Чимало теорем, які ви будете вивчати, містять формули, що дозволяють отримати нові числові характеристики геометричних фігур. Найважливішою з цих теорем є знаменита теорема Піфагора, зустріч із якою чекає на вас саме у восьмому класі.

Однак вивчення геометрії не вичерpuється лише обчисленнями. Завдяки цьому підручнику ви дослідите нові геометричні фігури, поглибите свої знання з логіки, набудете досвіду розв'язування задач оригінальними методами, дізнаєтесь про життя й здобутки визначних учених минулого. Майже в кожному параграфі вам запропоновано довести математичне твердження або навести приклад, провести аналогію, тобто самостійно рушити до нових знань. Сподіваємося, що кожний крок на шляху пізнання додасть вам упевненості у власних силах і наблизить до нових обріїв науки.

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття й факти виділено напівжирним шрифтом.

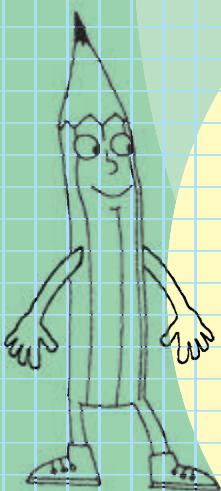
Вправи і задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп. **Усні вправи** допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете виконати рисунки та провести необхідні міркування у чернетці. Після усних можна переходити до **графічних вправ**, які виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть **письмові вправи**. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи задачі **рівня А**. Складнішими є задачі **рівня Б**. І нарешті, якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі **рівня В**. Значки і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд вчителя можуть бути використані відповідно для роботи в парах і групах.

Після кожного параграфа в рубриці «**Повторення**» зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення наступного матеріалу (поряд, зокрема, зазначено відповідні параграфи в підручнику: Єршова А. П. Геометрія. Підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х.: Вид-во «Ранок». — 2015. — 224 с.: іл.), і наведено відповідні задачі, що підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначенні задачі, номери яких позначено значком . Наприкінці кожного розділу подано **контрольні запитання** та **типові задачі** для контролю робіт, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua, ви зможете самостійно перевірити рівень ваших знань. Додаткові задачі до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а задачі підвищеної складності відкриють нові грані геометрії та красу нестандартного мислення. Розширити свої знання з кожного розділу ви можете, переглянувши відеоматеріали на тому самому сайті. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме значок .

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу послугують своєрідним геометричним компасом і допоможуть орієнтуватись у вивченому матеріалі. **Додатки**, наведені в кінці підручника, поглиблять ваші знання з окремих вивчених тем, а **історичні довідки** до розділів та матеріали рубрики «**Відатні математики України**» познайомлять із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та з діяльністю відомих учених.

Розділ I

Чотирикутники

- 
- § 1. Чотирикутник і його елементи
 - § 2. Паралелограм і його властивості
 - § 3. Ознаки паралелограма
 - § 4. Види паралелограмів
 - § 5. Трапеція
 - § 6. Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції
 - § 7. Вписані кути
 - § 8. Вписані й описані чотирикутники
 - § 9. Визначні точки трикутника

У величезному саду геометрії кожен може дібрати собі букет до смаку.

Давид Гільберт

Вивчаючи геометрію в сьомому класі, ви познайомилися з основними властивостями трикутників. Курс геометрії восьмого класу починається з розгляду більш складних фігур — чотирикутників. Але це не означає, що вже вивчену і, мабуть, призабуту за літо тему «Трикутники» не слід згадувати. Навпаки, цей матеріал варто повторити ще навіть до того, як ви прийдете на перший урок геометрії у восьмому класі. Адже саме властивості трикутників є тим ключем, який відмикає двері у світ геометрії.

Окремі види чотирикутників уже відомі вам із курсу математики 5–6 класів. Найбільш уважні й спостережливі могли помітити, що особливе місце серед чотирикутників посідають ті, які мають паралельні сторони. Саме тому вже найближчим часом вам стануть у пригоді властивості й ознаки паралельних прямих, доведені в сьомому класі,— цей матеріал також варто пригадати.

Серед теорем, які розглядатимуться в цьому розділі, особливу роль відіграє теорема Фалеса — одна з найдавніших теорем геометрії. З її допомогою ми згодом продовжимо рух шляхом пізнання нових таємниць геометричних фігур.



§ 1

Чотирикутник і його елементи

1.1. Означення чотирикутника

Із чотирикутником ви вже знайомилися на уроках математики. Дамо строгое означення цієї фігури.

Означення

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що їх послідовно сполучають. Дані точки називаються **вершинами чотирикутника**, а відрізки – **сторонами чотирикутника**. При цьому жодні три вершини не лежать на одній прямій, а жодні дві сторони не перетинаються.

На рис. 1 зображений чотирикутник із вершинами A , B , C і D та сторонами AB , BC , CD та AD .

Кажуть, що дві вершини чотирикутника є **сусідніми вершинами**, якщо вони сполучені однією стороною; вершини, які не є сусідніми, називають **протилежними вершинами**. Аналогічно сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, є **сусідніми сторонами**, а сторони, які не мають спільних точок, – **протилежними сторонами**. На рис. 1 сторони AB і CD – сусідні для сторони BC , а сторона AD – протилежна BC ; вершини B і D – сусідні з вершиною A , а вершина C – протилежна вершині A .

Чотирикутник позначають, послідовно вказуючи всі його вершини, причому букви, що стоять поряд, мають позначати сусідні вершини. Наприклад, чотирикутник на рис. 1 можна позначити $ABCD$, $BCDA$ або $CBAD$, але не можна позначати $ABDC$ або $BDCA$.

Означення

Діагоналю чотирикутника називається відрізок, що сполучає дві протилежні вершини.

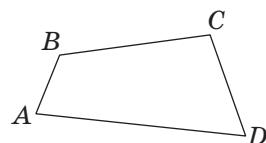


Рис. 1. Чотирикутник $ABCD$



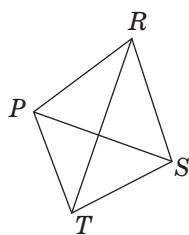


Рис. 2. Відрізки PS і RT — діагоналі чотирикутника $PRST$

У чотирикутнику $PRST$ (рис. 2) діагоналями є відрізки PS і RT .

Зазначимо, що будь-який чотирикутник має діагональ, яка ділить його на два трикутники.

Означення

Периметром чотирикутника називається сума довжин усіх його сторін.

Периметр чотирикутника (як і трикутника) позначають буквою P :

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

1.2. Опуклі чотирикутники. Сума кутів чотирикутника

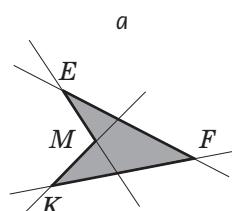
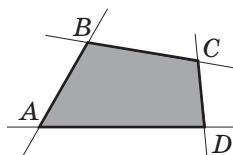
Будь-який чотирикутник обмежує скінченну частину площини, яку називають **внутрішньою областю** цього чотирикутника (на рис. 3, а, б її зафарбовано).

На рис. 3 зображені два чотирикутники і проведено прямі, на яких лежать сторони цих чотирикутників. У чотирикутнику $ABCD$ ці прямі не проходять через внутрішню область — такий чотирикутник є опуклим (рис. 3, а). У чотирикутнику $EFKM$ прямі EM і KM проходять через внутрішню область — цей чотирикутник є неопуклим (рис. 3, б).

Означення

Чотирикутник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Дійсно, чотирикутник $ABCD$ на рис. 3, а лежить по один бік від будь-якої з прямих AB , BC , CD або AD . У шкільному курсі геометрії ми будемо розглядати лише опуклі чотирикутники (якщо інше не обумовлено окремо).



б

Рис. 3. Опуклий (а)
і неопуклий (б)
чотирикутники

Спробуйте накреслити два чотирикутники, діагоналі одного з яких перетинаються, а другого — ні.

Означення

Кутом (внутрішнім кутом) опуклого чотирикутника $ABCD$ при вершині A називається кут BAD .

Кути, суміжний із внутрішнім кутом чотирикутника при даній вершині, називають **зовнішнім кутом чотирикутника** при даній вершині.

Кути, вершини яких є сусідніми, називають **сусідніми кутами**, а кути, вершини яких протилежні, — **протилежними кутами** чотирикутника.

Теорема (про суму кутів чотирикутника)

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Доведення¹

У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ, яка ділить його на два трикутники (рис. 4). Оскільки $\angle BAD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle BCD = \angle 3 + \angle 4$, то сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі всіх кутів трикутників ABC і ADC , тобто дорівнює 360° .

Теорему доведено. ■

Задача

Кути чотирикутника $ABCD$, сусідні з кутом C , рівні, а протилежний кут удвічі більший за кут C . Знайдіть кут C , якщо $\angle B = 60^\circ$.

Розв'язання

Кутами, сусідніми з C , є кути B і D , а кутом, протилежним до C , — кут A . За умовою задачі $\angle B = \angle D = 60^\circ$. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360° , то $\angle A + \angle C = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$. Якщо градусна міра кута C дорівнює x , то градусна міра кута A за умовою дорівнює $2x$. Звідси маємо: $x + 2x = 240$; $3x = 240$; $x = 80$. Отже, $\angle C = 80^\circ$.

Відповідь: 80° .

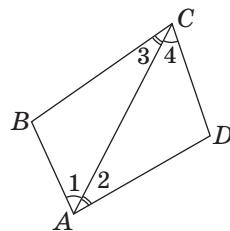


Рис. 4. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів двох трикутників



¹ Зазначимо, що ця теорема і її доведення справджаються також і для неопуклих чотирикутників (див. задачу 29).

Запитання і задачі



Усні вправи

1. Скільки сусідніх вершин має вершина чотирикутника? Скільки протилежних? Назвіть сусідні й протилежні вершини для вершини B чотирикутника $ABCD$.
2. Скільки сусідніх сторін має сторона чотирикутника? Скільки протилежних? Назвіть сусідні й протилежні сторони для сторони AD чотирикутника $ABCD$.
3. Відрізок, який сполучає дві вершини чотирикутника, не є його діагоналю. Чи можуть ці вершини бути протилежними?
4. Вершинами чотирикутника є точки K, L, M, N .
 - а) Відомо, що KM і ML — сторони чотирикутника. Назвіть його діагоналі.
 - б) Відомо, що KL — діагональ чотирикутника. Назвіть вершини, сусідні з вершиною K .
 - в) Даний чотирикутник можна назвати $KMLN$. Чи можна його назвати $MLKN$?
5. Чи існує чотирикутник $ABCD$, в якому $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 21$ см? Відповідь обґрунтуйте.
6. Чи можуть усі кути опуклого чотирикутника бути гострими; тупими; прямими?
7. Чи може опуклий чотирикутник мати три гострі кути; три тупі кути; два прямі кути; три прямі кути і один непрямий?
8. Чи можуть кути трикутника дорівнювати трьом кутам із чотирьох кутів чотирикутника? Відповідь обґрунтуйте.



Графічні вправи

9. Накресліть опуклий чотирикутник з вершинами A, B, C і D .
 - а) Дайте називу отриманому чотирикутнику; проведіть його діагоналі.
 - б) Виміряйте три кути чотирикутника. Користуючись відповідною теоремою, знайдіть градусну міру четвертого кута. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

 **10.** Проведіть дві паралельні прямі. Позначте на одній із них точки A і D , а на другій — точки B і C так, щоб у разі послідовного сполучення цих точок утворився чотирикутник $ABCD$.

- Чи є побудований чотирикутник опуклим? Чому?
- Виміряйте зовнішні кути чотирикутника $ABCD$ (по одному при кожній вершині) і обчисліть їх суму.



Письмові вправи

Рівень А

 **11.** Знайдіть периметр чотирикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 5 см, а кожна наступна сторона на 2 см більша за попередню.

 **12.** Периметр чотирикутника дорівнює 20 см. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них складає 40 % периметра, а три інші рівні.

 **13.** Два кути чотирикутника дорівнюють 80° і 100° , а два інші кути мають рівні градусні міри. Знайдіть найбільший кут чотирикутника.

 **14.** Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, а сума кутів A і B дорівнює 160° .

 **15.** Якщо три кути чотирикутника є тупими, то четвертий кут — гострий. Доведіть.

 **16.** Якщо сума трьох кутів чотирикутника дорівнює 270° , то дві сторони чотирикутника перпендикулярні. Доведіть.

Рівень Б

 **17.** Визначте, чи може чотирикутник $ABCD$ бути опуклим, якщо:

- точки A і D лежать по різні боки від прямої BC ;
- пряма AB перетинає пряму CD ;
- пряма AB перетинає відрізок CD .

Виконайте рисунки.

 **18.** Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 3 дм, а одна сторона менша за кожну з трьох інших на 2 см, 3 см і 5 см відповідно.

 **19.** Сторони чотирикутника відносяться як $3 : 4 : 5 : 6$. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо сума його найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см.

20. Знайдіть кути чотирикутника, якщо один із них удвічі менший за другий, на 20° менший за третій і на 40° менший за четвертий.

 **21.** Знайдіть найменший кут чотирикутника, якщо суми його кутів, узятих по три, дорівнюють 240° , 260° і 280° .

22. Якщо один із кутів опуклого чотирикутника є гострим, то в цьому чотирикутнику обов'язково є тупий кут. Доведіть.

 **23.** Один із кутів опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших кутів. Доведіть, що даний кут є тупим.

Рівень В

24. Периметри чотирикутників $ABCD$ і $ABCD_1$ рівні. Чи може один із цих чотирикутників бути опуклим, а інший — неопуклим? Відповідь підтверджте рисунком.

25. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 23 дм. Знайдіть довжину діагоналі AC , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 15 дм, а периметр трикутника ADC дорівнює 22 дм.

 **26.** У чотирикутнику три кути рівні, а четвертий кут менший за їхню суму на 240° . Знайдіть кути чотирикутника.

27. Доведіть, що діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються.

 **28.** Доведіть, що будь-який відрізок із кінцями на сторонах опуклого чотирикутника лежить у внутрішній області цього чотирикутника.

29. У неопуклому чотирикутнику $ABCD$ градусною мірою кута при вершині B вважають градусну міру α кута ABC , якщо хоча б одна з внутрішніх точок відрізків CD або AD лежить у внутрішній області кута ABC (рис. 5, а), або $(360^\circ - \alpha)$, якщо жодна внутрішня точка відрізків CD та AD не лежить у внутрішній області кута ABC (рис. 5, б). Доведіть, що сума кутів неопуклого чотирикутника дорівнює 360° .

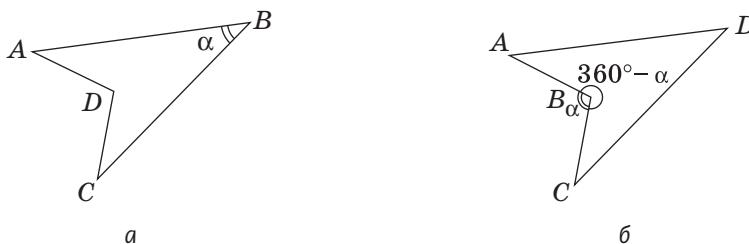


Рис. 5



Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- трикутник і його елементи;
- ознаки рівності трикутників;
- властивості й ознаки паралельних прямих.

7 клас, § 7, 8, 10

7 клас, § 13–15

Задачі¹

30. Відомо, що $\triangle KMN = \triangle NPK$ (рис. 6).
- Доведіть, що $MK \parallel NP$.
 - Знайдіть кут P , якщо $\angle M = 65^\circ$.
31. На рис. 6 $MK = PN$, $\angle MKN = \angle PNK$.
- Доведіть, що $MN \parallel KP$.
 - Знайдіть MN , якщо $KP = 14$ см.

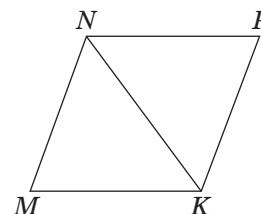


Рис. 6

¹ Нагадаємо, що запис $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означає рівність відповідних сторін і кутів, тобто $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

§2

Паралелограм і його властивості

Паралелограм – від грецьких слів «паралелос» – той, що йде поряд, паралельний, і «грамма» – лінія

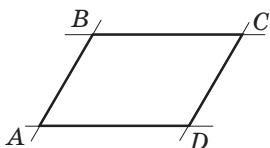


Рис. 7.
Паралелограм $ABCD$

2.1. Означення паралелограма

Розглянемо на площині дві паралельні прямі, які перетинаються двома іншими паралельними прямими (рис. 7).

У результаті такого перетину утворюється чотирикутник, який має спеціальну назву — паралелограм.

Означення

Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.

На рис. 7 зображене паралелограм $ABCD$, у якому $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



Задача

На рис. 8 $\triangle KLM = \triangle MNK$. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

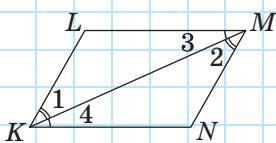


Рис. 8

Розв'язання

З рівності трикутників KLM і MNK випливає рівність кутів: $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Кути 1 і 2 є внутрішніми різносторонніми при прямих KL і MN та січній KM . Аналогічно кути 3 і 4 є внутрішніми різносторонніми при прямих LM і KN та січній KM . За ознакою паралельності прямих маємо: $KL \parallel MN$ і $LM \parallel KN$. Отже, у чотирикутнику $KLMN$ протилежні сторони попарно паралельні, тобто $KLMN$ — паралелограм за означенням.

Як і в трикутнику, в паралелограмі можна провести висоти (рис. 9).

Означення

Висотою паралелограма називається перпендикуляр, проведений з точки однієї сторони до прямої, що містить протилежну сторону.

Очевидно, що до однієї сторони паралелограма можна провести безліч висот (рис. 9, а), — усі вони будуть рівні як відстані між паралельними прямими. А з однієї вершини паралелограма можна провести дві висоти до різних сторін (рис. 9, б). Часто, кажучи «висота паралелограма», мають на увазі її довжину.

Пригадайте, скільки висот можна провести до однієї сторони трикутника; з однієї вершини трикутника.

2.2. Властивості паралелограма

Безпосередньо з означення паралелограма випливає, що будь-які два його сусідні кути є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, які містять протилежні сторони. Це означає, що *сума двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°* .

Доведемо ще кілька важливих властивостей сторін, кутів і діагоналей паралелограма.

Теорема (властивості паралелограма)

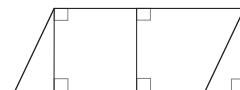
У паралелограмі:

- 1) протилежні сторони рівні;
- 2) протилежні кути рівні;
- 3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

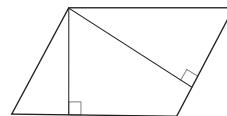
Властивості 1 і 2 ілюструє рис. 10, а, а властивість 3 — рис. 10, б.

Доведення

□ Проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагональ AC (рис. 11) і розглянемо трикутники ABC

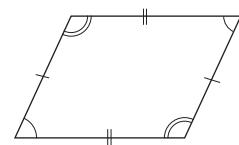


а

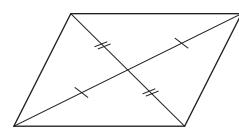


б

Рис. 9. Висоти паралелограма



а



б

Рис. 10. Властивості паралелограма

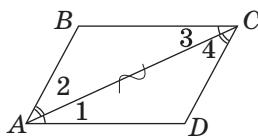


Рис. 11. Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники

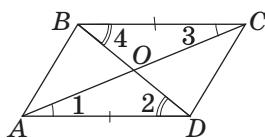


Рис. 12. При перетині діагоналей паралелограма утворюються рівні трикутники

і CDA . У них сторона AC — спільна, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC , $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси, зокрема, випливає, що $AB = CD$, $AD = BC$ і $\angle B = \angle D$. А оскільки $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, то $\angle BAD = \angle BCD$. Отже, властивості 1 і 2 доведено.

Для доведення властивості 3 проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD , які перетинаються в точці O (рис. 12).

Розглянемо трикутники AOD і COB . У них $AD = BC$ за доведеним, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC , $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD . Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за другою ознакою. Звідси випливає, що $AO = CO$ і $BO = DO$, тобто точка O є серединною кожної з діагоналей AC і BD . Теорему доведено повністю. ■



Задача

Сума двох кутів паралелограма дорівнює 200° . Знайдіть кути паралелограма.

Розв'язання

Нехай дано паралелограм $ABCD$.

Оскільки сума двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° , то дані кути можуть бути лише протилежними. Нехай $\angle B + \angle D = 200^\circ$. Тоді за властивістю кутів паралелограма $\angle B = \angle D = 200^\circ : 2 = 100^\circ$.

Отже, $\angle A = \angle C = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Відповідь: 80° і 100° .

Задача

0

У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = 6$ см.

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E , $BE = EC$ (рис. 13). Зазначимо, що $\angle 1 = \angle 2$, оскільки AE — бісектриса кута BAD , а $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AE . Звідси $\angle 2 = \angle 3$, тобто за ознакою рівнобедреного трикутника трикутник ABE — рівнобедрений з основою AE , отже, $BE = AB = 6$ см. За умовою $BE = EC$, тобто $BC = 12$ см. Отже, оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $P_{ABCD} = 2 \cdot (6 + 12) = 36$ (см).

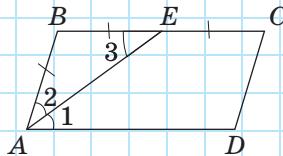


Рис. 13

Відповідь: 36 см.

Запитання і задачі**Усні вправи**

32. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Назвіть:
 - а) сторону, паралельну стороні BC ;
 - б) сторону, яка дорівнює стороні CD ;
 - в) кут, який дорівнює куту A .
33. Чи правильно, що будь-який паралелограм має:
 - а) два кути, сума яких дорівнює 180° ;
 - б) два гострі і два тупі кути?
34. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B < \angle C$. Порівняйте кути A і D .
35. У паралелограмі $ABCD$ $AB + CD > AD + BC$. Порівняйте сторони BC і CD .

36. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рис. 12). Назвіть:

- відрізок, який є медіаною трикутника ACD ;
- трикутник, медіаною якого є відрізок AO .



Графічні вправи

37. Проведіть дві паралельні прямі. Позначте на одній із них точки A і D та проведіть через ці точки дві інші паралельні прямі, які перетинають другу пряму в точках B і C відповідно.

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Виміряйте кут A паралелограма $ABCD$. Користуючись властивостями паралелограма, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте отримані результати вимірюванням.
- Проведіть діагональ AC і позначте її середину — точку O . За допомогою лінійки перевірте, чи належить ця точка відрізку BD .



38. Накресліть трикутник ABD . Проведіть через вершини B і D прямі, паралельні сторонам AD і AB відповідно. Позначте точку C — точку перетину цих прямих.

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Проведіть дві висоти паралелограма з вершини B . Чи рівні вони?
- Виміряйте сторони AD та AB і знайдіть периметр паралелограма. Якою властивістю паралелограма ви скористалися?



Письмові вправи

Рівень А

39. Накресліть у зошиті трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні. Скільки паралелограмів утворилося на рисунку? Скільки спільних вершин мають будь-які два утворені паралелограми?



40. Три паралельні прямі перетинаються з двома іншими паралельними прямими. Скільки паралелограмів утворилося?

41. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо сторона AD дорівнює 12 см і складає $\frac{2}{3}$ сторони AB .

-  **42.** Периметр паралелограма дорівнює 24 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо:
- одна з них на 2 см більша за іншу;
 - одна з них утрічі менша за іншу;
 - сума трьох його сторін дорівнює 17 см.
- 43.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- один із них дорівнює 110° ;
 - один із них на 70° менший від іншого;
 - сума двох його кутів дорівнює 90° ;
 - діагональ утворює з його сторонами кути 30° і 45° .
-  **44.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- один із них є прямим;
 - градусні міри двох його кутів відносяться як $2 : 7$;
 - різниця двох його кутів дорівнює 40° ;
 - сума трьох його кутів дорівнює 330° .
- 45.** Точка перетину діагоналей паралелограма віддалена від двох його вершин на 5 см і 8 см. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма.
- 46.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть за означенням, що $ABCD$ — паралелограм.
-  **47.** У чотирикутнику $VXYZ$ $VX \parallel YZ$, $\angle V + \angle X = 180^\circ$. Доведіть за означенням, що $VXYZ$ — паралелограм.

Рівень Б

- 48.** На площині дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, трьома вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?
-  **49.** Скільки різних паралелограмів можна утворити з двох рівних різносторонніх трикутників, прикладаючи їх один до одного?
- 50.** Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 14 дм, а периметр трикутника ABC — 10 дм. Знайдіть довжину діагоналі AC .
-  **51.** Сума трьох сторін паралелограма дорівнює 15 м, а сума трьох інших його сторін — 18 м. Знайдіть периметр паралелограма.
- 52.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- бісектриса одного з його кутів перетинає сторону під кутом 35° ;
 - висота паралелограма утворює з однією з його сторін кут 42° .

- 53.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- усі його сторони рівні, а діагональ утворює з однією зі сторін кут 25° ;
 - висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить даний кут у відношенні $1 : 3$.
- 54.** Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC у відношенні $1 : 4$, починаючи від точки B . Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BC = 15$ см. Скільки розв'язків має задача? Відповідь обґрунтуйте.
- 55.** Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 6 см. Знайдіть периметр паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
- 56 (опорна).** *Будь-який відрізок з кінцями на протилежних сторонах паралелограма, який проходить через точку перетину його діагоналей, ділиться цією точкою навпіл.* Доведіть.
- 57.** З вершин тупих кутів B і D паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляри BA_1 і DC_1 до сторін AD і BC відповідно. Доведіть, що чотирикутник A_1BC_1D — паралелограм.
- 58.** За даними рис. 14 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

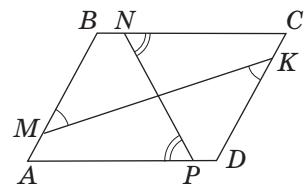


Рис. 14

Рівень В

- 59.** Через точку, яка належить стороні рівностороннього трикутника, проведено прямі, паралельні двом іншим його сторонам. Визначте периметр утвореного паралелограма, якщо периметр трикутника дорівнює 18 см.
- 60.** У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і D ділять сторону BC на відрізки завдовжки 5 см, 3 см і 5 см. Знайдіть периметр паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
- 61.** Знайдіть кути паралелограма, якщо його діагональ перпендикулярна до однієї зі сторін і дорівнює половині іншої сторони.
- 62.** Знайдіть кути паралелограма, який ділиться діагоналлю на два рівнобедрені прямокутні трикутники (розгляньте два випадки).
- 63 (опорна).** *Бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні, а бісектриси двох протилежних кутів паралельні або лежать на одній прямій.* Доведіть.

64 (опорна). Кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині. Доведіть.

 **65.** Якщо діагональ ділить чотирикутник на два рівні трикутники, то такий чотирикутник є паралелограмом. Чи є правильним це твердження? Відповідь обґрунтуйте.

 **66.** Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то всі його сторони рівні. Доведіть. Сформулюйте й доведіть обернене твердження.



Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників;
- властивості й ознаки паралельності прямих;
- поняття про властивості й ознаки.

 7 клас, § 8, 10, 13

 7 клас, § 14, 15

Задачі

 **67.** Доведіть, що пряма, яка проходить через середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, паралельна його основі.

 **68.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$. Які співвідношення необхідно додати до умови, щоб за даними задачі довести, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм? Висловіть припущення.

§3

Ознаки паралелограма

3.1. Теорема про ознаки паралелограма

Для того щоб скористатися властивостями паралелограма, у багатьох випадках потрібно спочатку переконатися, що даний чотирикутник дійсно є паралелограмом. Це можна довести або за означенням (див. задачу в п. 2.1), або за ознаками — умовами, які гарантують, що даний чотирикутник — паралелограм. Доведемо ознаки паралелограма, які найчастіше застосовуються на практиці.

Теорема (ознаки паралелограма)

- 1) Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 2) Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 3) Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

Доведення

□ 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$ і $AD = BC$ (рис. 15). Проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA . Вони мають спільну сторону AC , $AD = BC$ за умовою, $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності цих трикутників випливає рівність кутів 3 і 4 . Але ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD та січній AC . Тоді за ознакою паралельності прямих $AB \parallel CD$. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні, звідки випливає, що $ABCD$ — паралелограм за означенням.

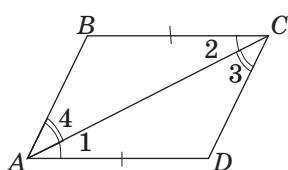


Рис. 15. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$ і $AD = BC$, то $ABCD$ — паралелограм

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $AD = BC$ (рис. 16). Знову проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA . У цьому випадку вони рівні за третьою ознакою: сторона AC — спільна, $AB = CD$ і $AD = BC$ за умовою. З рівності трикутників випливає рівність кутів 1 і 2 , які є внутрішніми різносторонніми при прямих AD і BC та січній AC . За ознакою паралельності прямих $AD \parallel BC$. Отже, в чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC паралельні й рівні, і за щойно доведеною ознакою 1 $ABCD$ — паралелограм.

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , $AO = CO$ і $BO = DO$ (рис. 17). Розглянемо трикутники AOB і COD . Ці трикутники рівні за першою ознакою: $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, а $AO = CO$ і $BO = DO$ за умовою. Отже, рівні і відповідні сторони і кути цих трикутників: $AB = CD$ і $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $AB \parallel CD$, і $ABCD$ — паралелограм за ознакою 1 .

Теорему доведено повністю. ■

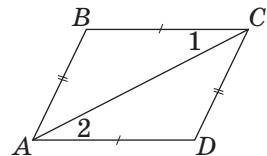


Рис. 16. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $AD = BC$, то $ABCD$ — паралелограм

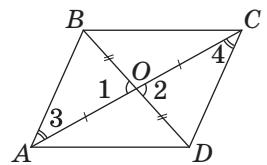


Рис. 17. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AO = CO$ і $BO = DO$, то $ABCD$ — паралелограм

Задача

У паралелограмі $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно (рис. 18). Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

Розв'язання

Розглянемо чотирикутник $MBND$. Сторони MB і ND паралельні, оскільки лежать на прямих, що містять протилежні сторони паралелограма $ABCD$. Крім того, $MB = ND$ як половини рівних сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Таким чином, у чотирикутнику $MBND$ дві сторони паралельні й рівні. Отже, чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

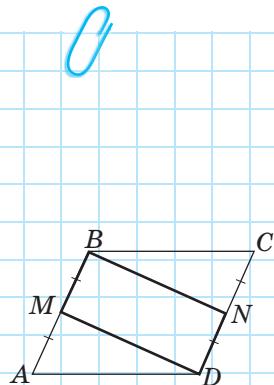


Рис. 18

Спробуйте самостійно знайти способи розв'язання цієї задачі, які ґрунтуються на застосуванні інших ознак або означення паралелограма.

3.2*. Необхідні й достатні умови¹

Кожна з ознак паралелограма вказує на певну особливість, наявності якої в чотирикутнику **достатньо** для того, щоб стверджувати, що він є паралелограмом. Узагалі в математиці ознаки інакше називають **достатніми умовами**. Наприклад, перпендикулярність двох прямих третій — достатня умова паралельності даних двох прямих.

На відміну від ознак, властивості паралелограма вказують на ту особливість, яку обов'язково має будь-який паралелограм. Властивості інакше називають **необхідними умовами**. Пояснимо таку назву прикладом: рівність двох кутів **необхідна** для того, щоб кути були вертикальними, адже якщо цієї рівності немає, вертикальними такі кути бути не можуть.

У випадку правильності теореми «Якщо A , то B » твердження A є достатньою умовою для твердження B , а твердження B — необхідною умовою для твердження A . Схематично це можна подати так:

Якщо A, то B
A — достатня умова для B
B — необхідна умова для A

Отже, **необхідні умови (властивості)** паралелограма **випливають з того**, що даний чотирикутник — паралелограм; **з достатніх умов (ознак) випливає те**, що даний чотирикутник — паралелограм.

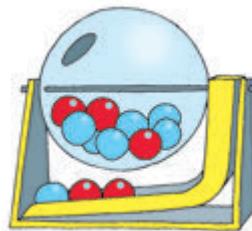
Порівнюючи властивості й ознаки паралелограма, неважко помітити, що одна й та сама

¹ Тут і далі зірочкою позначено матеріал, вивчення якого не є обов'язковим.



умова (наприклад, попарна рівність протилежних сторін) є і властивістю, і ознакою паралелограма. У такому випадку кажуть, що умова є **необхідною і достатньою**. Необхідну і достатню умову інакше називають **критерієм**. Наприклад, рівність двох кутів трикутника — критерій рівнобедреного трикутника.

Чимало прикладів необхідних і достатніх умов можна знайти в інших науках і в повсякденному житті. Усі ми знаємо, що повітря — необхідна умова для життя людини, але не достатня (людині для життя потрібно ще багато чого, зокрема їжа). Виграш у лотерею — достатня умова для матеріального збагачення людини, але не необхідна, адже покращити своє фінансове становище можна і в інший спосіб. Спробуйте самостійно знайти декілька прикладів необхідних і достатніх умов.



Запитання і задачі



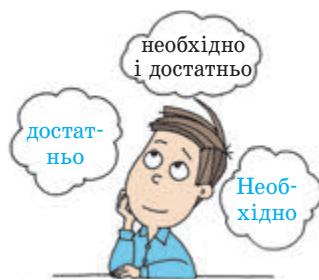
Усні вправи

- 69.** Діагоналі чотирикутника $DEFK$ перетинаються в точці O , причому $DO = OF$, $EO = OK$. Назвіть паралельні сторони чотирикутника і поясніть, чому вони паралельні.
- 70.** У чотирикутнику $KLMN$ $KL \parallel MN$ і $KL = MN$. Назвіть рівні кути чотирикутника і поясніть, чому вони рівні.
- 71.** У чотирикутнику $PRSQ$ $PR = SQ$, $PQ = RS$. Знайдіть суму кутів R і S .
- 72.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$. Яке спiввiдношення мiж сторонами чотирикутника необхiдно додати до умови задачi, щоб довести, що $ABCD$ — паралелограм? Наведiть усi можливi варiанти вiдповiдi.

73. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Чи може цей чотирикутник бути паралелограмом? Яка особливість паралелограма (властивість або ознака) використовується для розв'язування цієї задачі?

 **74.** Поставте замість крапок слова «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо», щоб отримане твердження було правильним:

- для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;
- для того щоб два кути були суміжними, ..., щоб їхня сума дорівнювала 180° ;
- для того щоб прямі AB і CD були паралельними, ..., щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом.



Графічні вправи

75. Проведіть дві паралельні прямі. Відкладіть на одній із них відрізок AD , а на другій прямі — відрізок BC , що дорівнює AD , так, щоб відрізки AB і CD не перетиналися. Побудуйте відрізки AB і CD .

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Позначте точку M таку, щоб чотирикутник $ABMC$ був паралелограмом. Чи лежать точки M , C і D на одній прямій?



76. Накресліть трикутник ABC і проведіть його медіану BO . На промені BO побудуйте відрізок OD , що дорівнює BO . Сполучіть точку D з точками A і C .

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Позначте точку M так, щоб чотирикутник $ABDM$ був паралелограмом. Чи лежать точки M , C і D на одній прямій?

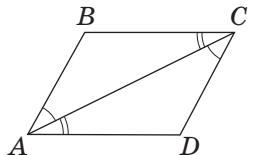


Письмові вправи

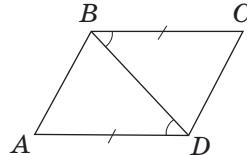
Рівень А

77. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Чи є цей чотирикутник паралелограмом, якщо $AO = 4$ см, $OC = 40$ мм, $BD = 1,2$ дм, $OD = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

- 78.** За даними рис. 19 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



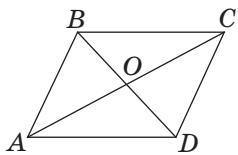
a



б

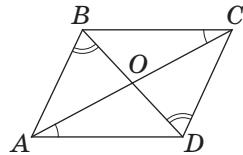
Рис. 19

- 79.** За даними рис. 20 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

а



б

Рис. 20

- 80.** У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD паралельні. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо $AB = CD = 9$ см, $AD = 4$ см.

- 81.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Знайдіть кути чотирикутника, якщо кут A втрічі більший за кут B .

- 82.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Точки B_1 і D_1 — середини відрізків BO і DO відповідно. Доведіть, що чотирикутник AB_1C_1D — паралелограм.

- 83.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін паралелограма, ділить даний паралелограм на два чотирикутники, які також є паралелограмами.

Рівень Б

84. У технічному кресленні використовують механічну рейсшину (рис. 21). Поясніть, як за допомогою цього приладу побудувати чотири вершини паралелограма.

 **85.** Поясніть, чому вісь CD , на якій кріпиться лампа (рис. 22), завжди лишається вертикальною.

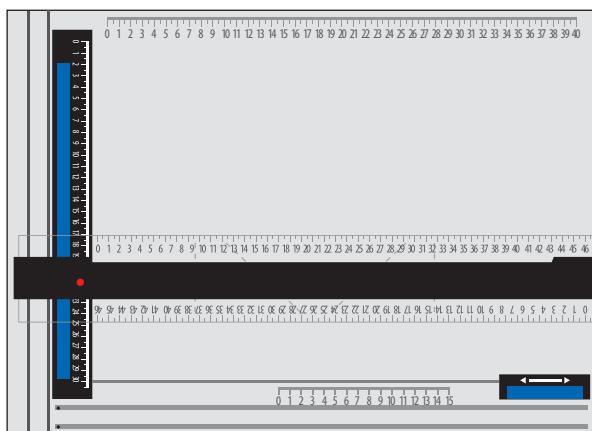


Рис. 21

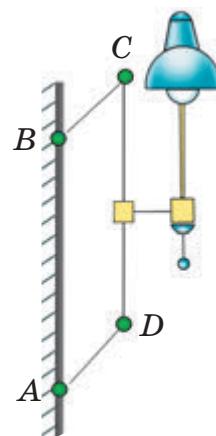
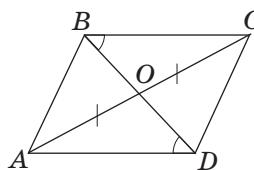
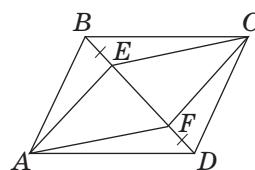


Рис. 22

86. За даними рис. 23 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

*a**b*

$AECF$ — паралелограм

Рис. 23

87. За даними рис. 24 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

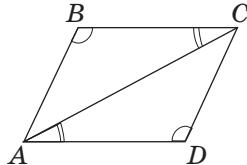
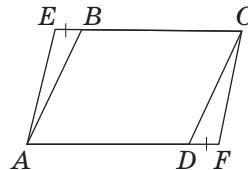
*a**b* $AECF$ — паралелограм

Рис. 24

88. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів B і D перетинають діагональ AC в точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BEDF$ — паралелограм.

89. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що середини відрізків AO , BO , CO і DO є вершинами іншого паралелограма.

Рівень В

90. На рис. 25 чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ теж є паралелограмом.

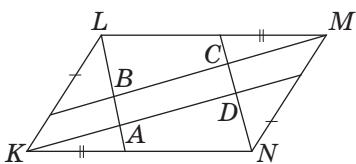
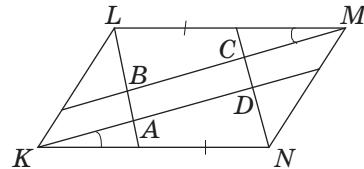
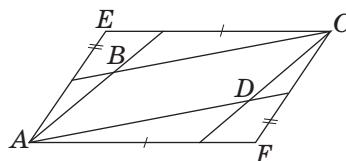
*a**b*

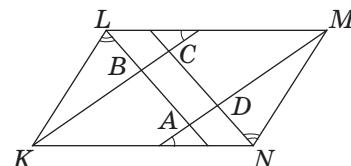
Рис. 25

 **91.** За даними рис. 26 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



$AECF$ — паралелограм

a



$KLMN$ — паралелограм

б

Рис. 26

92 (опорна). Якщо в чотирикутнику протилежні кути попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

 **93.** Усередині даного кута A позначено точку O . Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута, серединою якого є точка O .

 **94.** Точка M міститься всередині кута A , вершина якого недосяжна (рис. 27). Побудуйте промінь з початком у точці M , спрямований на точку A .

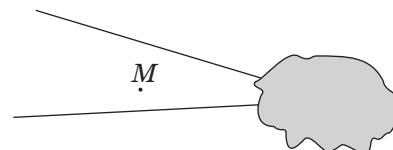


Рис. 27



Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- рівнобедрений трикутник;
- прямокутний трикутник.

 7 клас, § 11, 17

Задачі

95. Висоти трикутника ABC , проведені з вершин A і B , перетинаються в точці O , причому $AO = BO$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

96. Прямокутні трикутники ABC і DCB мають спільний катет BC , а гіпотенузи AC і BD паралельні. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.

§4

види паралелограмів

4.1. Прямокутник

Означення

Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рис. 28 зображене прямокутник $ABCD$. Оскільки прямокутник є окремим випадком паралелограма, він має всі властивості паралелограма: протилежні сторони прямокутника паралельні й рівні, протилежні кути рівні, діагоналі точкою перетину діляться навпіл і т.д. Однак прямокутник має деякі особливі властивості. Доведемо одну з них.

Теорема (властивість прямокутника)

Діагоналі прямокутника рівні.

Доведення

□ Нехай дано прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC і BD (рис. 29). Трикутники BAD і CDA прямокутні й рівні за двома катетами (AD спільний, $AB=CD$ як протилежні сторони прямокутника). Звідси випливає рівність гіпотенуз цих трикутників, тобто $AC=BD$, що й треба було довести. ■

Справджується також обернене твердження (ознака прямокутника):

якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником.

Доведіть це твердження самостійно.

Таким чином, можна стверджувати, що рівність діагоналей паралелограма — **необхідна й достатня умова прямокутника**.

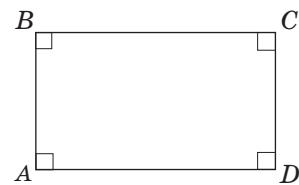


Рис. 28.
Прямокутник $ABCD$

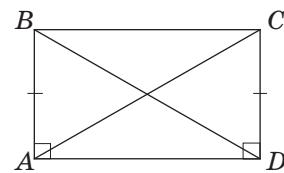


Рис. 29. Якщо $ABCD$ — прямокутник, то $AC=BD$

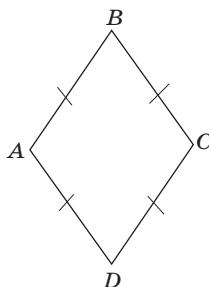
0

Опорна задача

Якщо всі кути чотирикутника прямі, то цей чотирикутник — **прямокутник**. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ (див. рис. 28). Кути A і B є внутрішніми односторонніми при прямих AD і BC та січній AB . Оскільки сума цих кутів становить 180° , то за означенням паралельності прямих $AD \parallel BC$. Аналогічно доводимо паралельність сторін $AB \parallel CD$. Отже, за означенням паралелограма $ABCD$ — паралелограм. А оскільки всі кути цього паралелограма прямі, то $ABCD$ — прямокутник за означенням.

Рис. 30. Ромб $ABCD$ **4.2. Ромб****Означення**

Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рис. 30 зображене ромб $ABCD$. Він має всі властивості паралелограма, а також деякі додаткові властивості, які ми зараз доведемо.

Теорема (властивості ромба)

Діагоналі ромба перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

Ці властивості ромба відображені на рис. 31.

Доведення

□ Нехай діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 32). Оскільки сторони ромба рівні, то трикутник ABC рівнобедрений з основою AC ,

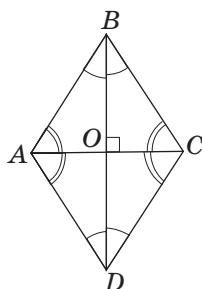


Рис. 31. Властивості

а за властивістю діагоналей паралелограма точка O — середина AC . Отже, відрізок BO — медіана рівнобедреного трикутника, яка водночас є його висотою і бісектрисою. Це означає, що $BD \perp AC$, тобто діагоналі ромба перпендикулярні, і $\angle ABD = \angle CBD$, тобто BD — бісектриса кута ABC .

Аналогічно доводимо, що діагоналі ромба є бісектрисами й інших його кутів. Теорему доведено. ■

Опорна задача (ознака ромба)

Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — ромб. Доведіть.

Розв'язання

Очевидно, що в чотирикутнику, всі сторони якого рівні, попарно рівними є і протилежні сторони. Отже, за ознакою паралелограма такий чотирикутник — паралелограм, а за означенням ромба, паралелограм, у якого всі сторони рівні, є ромбом.

Розв'язуючи задачі після параграфа, ви доведете інші ознаки прямокутника і ромба.

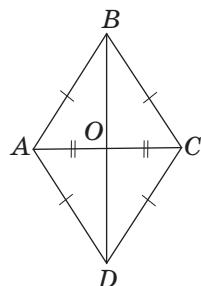


Рис. 32. До доведення властивостей ромба

Ромб — від грецького «ромбос» — бубон (у стародавні часи цей ударний музичний інструмент мав форму ромба)

4.3. Квадрат

На рис. 33 зображено ще один вид паралелограма — квадрат.

Означення

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Інакше можна сказати, що квадрат — це прямокутник, який є ромбом. Дійсно, оскільки квадрат

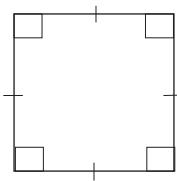


Рис. 33. Квадрат

Квадрат —
від латинського
«квадро» — чотири

є прямокутником і ромбом і, звісно ж, паралелограмом, то він має такі властивості:

- 1) усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні;
- 2) усі кути квадрата прямі;
- 3) діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, ділять кути квадрата навпіл і діляться точкою перетину навпіл.

4.4*. Зв'язок між окремими видами паралелограмів. Рівносильні твердження

За означеннями довільного паралелограма і його окремих видів ми можемо схематично зобразити зв'язок між ними (рис. 34).

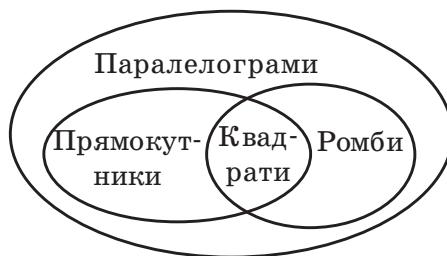


Рис. 34. Діаграма «Види паралелограмів»



На схемі подано множини паралелограмів, прямокутників і ромбів. Такий спосіб наочного подання множин називають *діаграмами Ейлера — Венна*. Діаграма Ейлера — Венна для паралелограмів демонструє, що множини прямокутників і ромбів є частинами (*підмножинами*) множини паралелограмів, а множина квадратів — спільною частиною (*перерізом*) множин прямокутників і ромбів. Діаграми Ейлера — Венна часто застосовують для підтвердження або перевірки правильності логічних міркувань.

Підсумовуючи матеріал цього параграфа, звернемо також увагу на те, що можна було б дати й інше означення квадрата: **квадратом називається ромб із прямими кутами**. Справді, обидва наведених означення описують одну й ту саму фігуру. Такі означення називають рівносильними. Узагалі два твердження називаються **рівносильними**, якщо вони або обидва справджаються, або обидва не справджаються. Наприклад, рівносильними є твердження «У трикутнику дві сторони рівні» і «У трикутнику два кути рівні», адже обидва вони правильні, якщо розглядається рівнобедрений трикутник, і обидва хибні, якщо йдеться про різносторонній трикутник.

Рівносильність двох тверджень також означає, що будь-яке з них є необхідною і достатньою умовою для іншого. Справді, розглянемо рівносильні твердження «Діагоналі паралелограма рівні» і «Паралелограм має прямі кути». З того, що діагоналі паралелограма рівні, випливає, що він є прямокутником, тобто має прямі кути, і навпаки: паралелограм із прямими кутами є прямокутником, тобто має рівні діагоналі. На цьому прикладі легко відстежити логічні кроки переходу від ознак фігури до її означення і згодом — до властивостей. Такий перехід досить часто доводиться робити в процесі розв'язування задач.

Самостійно наведіть приклади рівносильних тверджень.



Запитання і задачі



Усні вправи

- 97.** Назвіть види паралелограмів, у яких:
- усі кути рівні;
 - усі сторони рівні;
 - діагоналі рівні;
 - діагоналі перпендикулярні.
- 98.** Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рис. 31). Назвіть:
- бісектрису трикутника ABD ;
 - висоту трикутника ABC ;
 - медіану трикутника BCD .
- 99.** У прямокутнику $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть:
- відстань від точки C до сторони AD ;
 - відстань між прямими AB і CD .
- 100.** Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O . Назвіть усі рівні трикутники, які утворюються при перетині діагоналей. Визначте їх вид.
- 101.** Чи може діагональ прямокутника дорівнювати його стороні? Чи може діагональ ромба дорівнювати його стороні?
- 102.** Чи може прямокутник бути ромбом? У якому випадку?
- 103.** Наведіть контрприклади, які спростовують наведені хибні твердження:
- чотирикутник, який має два прямі кути,— прямокутник;
 - чотирикутник із перпендикулярними діагоналями — ромб;
 - чотирикутник із рівними діагоналями — прямокутник;
 - чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні й рівні,— квадрат.



Графічні вправи

- 104.** Накресліть дві перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці O . На одній із прямих відкладіть по різні боки від точки O рівні відрізки OA і OC , а на другій прямій — рівні відрізки OB і OD . Солучіть точки A , B , C і D .

- Виміряйте сторони чотирикутника $ABCD$ і визначте його вид.
- Виміряйте кут A чотирикутника $ABCD$. Користуючись властивостями цього чотирикутника, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте отримані результати вимірюванням.
- Виміряйте кути ADB і CDB . Виділіть кольором усі пари рівних кутів між діагоналями і сторонами чотирикутника.

 **105.** Накресліть прямокутний трикутник ABD з гіпотенузою BD . Проведіть через вершини B і D прямі, паралельні сторонам AD і AB відповідно. Позначте точку C — точку перетину цих прямих.

- Виміряйте сторони чотирикутника $ABCD$ і визначте його вид.
- Проведіть діагональ AC . Виміряйте і порівняйте довжини діагоналей чотирикутника.
- Позначте на прямих BC і AD точки C_1 і D_1 так, щоб чотирикутник ABC_1D_1 був квадратом.



Письмові вправи

Рівень А

106. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо $AC = 15$ см, а периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

 **107.** Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 36 см, а одна сторона вдвічі більша за іншу.

108. У прямокутнику $ABCD$ $\angle BAC = 65^\circ$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

 **109.** Діагоналі прямокутника перетинаються під кутом 80° . Знайдіть кути, на які діагональ ділить кут прямокутника.

110. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O , причому $\angle COD = 60^\circ$, $CD = 8$ см. Знайдіть довжину діагоналі.

111. Знайдіть кути ромба, якщо:

- один із них на 120° більший за інший;
- одна з його діагоналей дорівнює стороні.

 **112.** Знайдіть кути ромба, якщо:

- сума двох із них дорівнює 220° ;
- діагональ утворює з однією з його сторін кут 25° .

113. Периметр квадрата дорівнює 40 м. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.

-  **114.** Відстань між протилежними сторонами квадрата дорівнює 5 см. Знайдіть периметр квадрата.
- 115 (опорна).** Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм є прямокутником. Доведіть.
-  **116 (опорна).** Якщо в паралелограмі сусідні сторони рівні, то цей паралелограм є ромбом. Доведіть.

Рівень Б

- 117.** Точка перетину діагоналей прямокутника віддалена від двох його сторін на 3 см і 4 см. Знайдіть периметр прямокутника.
-  **118.** Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону завдовжки 12 см навпіл. Знайдіть периметр прямокутника.
- 119.** З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, віддалені від центра кола на 3 см і 5 см. Знайдіть довжини цих хорд.
- 120.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- кути, утворені його стороною з діагоналями, відносяться як $1:4$;
 - висота ромба вдвічі менша за сторону.
-  **121.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- висота, проведена з вершини тупого кута, відтинає від ромба рівнобедрений трикутник;
 - висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл.
- 122.** З вершини кута ромба, що дорівнює 120° , проведено діагональ завдовжки 6 см. Знайдіть периметр ромба.
-  **123.** Діагональ квадрата дорівнює 18 м, а його сторона є діагонааллю іншого квадрата. Знайдіть периметр меншого квадрата.
- 124.** У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (рис. 35). Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо сторона квадрата дорівнює 2 см.
-  **125.** У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що прямий кут є спільним для обох фігур (рис. 36). Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює 4 см.

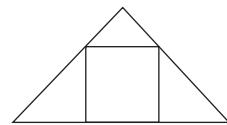


Рис. 35

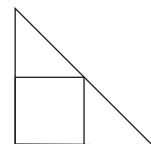


Рис. 36

126 (опорна). Паралелограм із перпендикулярними діагоналями є ромбом. Доведіть.

👉 **127 (опорна).** Якщо діагональ паралелограма лежить на бісектрисі його кута, то цей паралелограм — ромб. Доведіть.

128. Відрізки AC і BD — діаметри кола. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

Рівень В

129. Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону у відношенні $2:1$. Знайдіть кути, на які діагональ ділить кут прямокутника.

👉 **130.** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника перетинає його сторону під кутом, що дорівнює куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.

👉 **131.** Доведіть, що всі висоти ромба рівні. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

👉 **132.** З точки перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

133. Якщо діагоналі чотирикутника лежать на бісектрисах його кутів, то цей чотирикутник — ромб. Доведіть.

👉 **134.** Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, який не є ромбом, перетинаючись, утворюють прямокутник.

👉 **135.** Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.



Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- рівнобедрений трикутник;
- прямокутний трикутник;
- задачі на побудову.

👉 7 клас, § 11, 17, 20

Задачі

- 136.** Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC , перетинає бічні сторони AB і BC в точках D і E відповідно.
- Доведіть, що $AE = CD$.
 - Знайдіть кути чотирикутника $ADEC$, якщо $\angle B = 80^\circ$.
- 137.** У чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC паралельні, а сторони AB і CD рівні. Чи обов'язково цей чотирикутник є паралелограмом? Наведіть контрприклад.



Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 1

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

- Висота паралелограма ділить тупий кут на два кути, різниця яких дорівнює 20° . Знайдіть кути паралелограма.
- Сума довжин двох сторін паралелограма дорівнює 48 см, а периметр — 88 см. Знайдіть сторони паралелограма.
- За даними рис. 37 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.
- Бісектриса кута паралелограма в результаті перетину з його стороною утворює кути, градусні міри яких відносяться як $1:3$. Визначте вид паралелограма.
- Доведіть, що ромб є квадратом, якщо його діагоналі утворюють з однією стороною рівні кути.
- Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону на частини, одна з яких дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

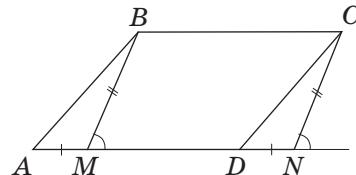


Рис. 37

§ 5

Трапеція

5.1. Означення трапеції

Як відомо, будь-який паралелограм має дві пари паралельних сторін. Розглянемо тепер чотирикутник, який має лише одну пару паралельних сторін.

Означення

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Трапеція – від грецького «trapelos» – маленький стіл. Спільнокореневим є слово «трапеза»

Паралельні сторони трапеції називають її **основами**, а непаралельні сторони – **бічними сторонами**. На рис. 38 у трапеції $ABCD$ сторони AD і BC є основами, а AB і CD – бічними сторонами.

Кути, прилеглі до однієї бічної сторони, є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, на яких лежать основи трапеції, та січній, на якій лежить бічна сторона. Звідси за теоремою про властивість кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, випливає, що **сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°** . На рис. 38 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$.

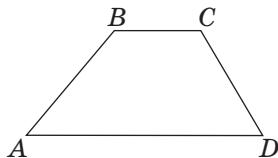


Рис. 38. Трапеція $ABCD$

Означення

Висотою трапеції називається перпендикуляр, проведений з точки однієї основи до прямої, яка містить іншу основу.

Очевидно, що в трапеції можна провести безліч висот (рис. 39), – усі вони рівні як відстані між паралельними прямими.

Найчастіше під час розв'язування задач висоти проводять із вершин кутів при меншій основі трапеції.

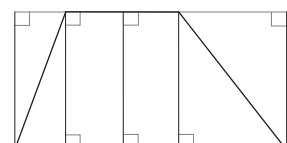


Рис. 39. Висоти трапеції

5.2. Окремі види трапецій

Як серед трикутників та паралелограмів, так і серед трапецій виділяються окремі види, які мають додаткові властивості.

Означення

Прямокутною трапецією називається трапеція, у якій одна з бічних сторін перпендикулярна до основ.

На рис. 40 зображена прямокутна трапеція $ABCD$. Вона має два прямі кути при меншій бічній стороні AB . Ця сторона водночас є її висотою трапеції.

Означення

Рівнобічною трапецією називається трапеція, у якій бічні сторони рівні.

На рис. 41 зображена рівнобічна трапеція $ABCD$ з бічними сторонами AB і CD . Іноді рівнобічну трапецію також називають рівнобеденою.

Рівнобічна трапеція, як і рівнобедрений трикутник, має рівні кути при основі. Доведемо це в наступній теоремі.

Теорема (власливість рівнобічної трапеції)

У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

Доведення

□ Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AB = CD$.

Перед початком доведення зазначимо, що цією теоремою стверджується рівність кутів при кожній із двох основ трапеції, тобто необхідно довести, що $\angle A = \angle D$ і $\angle B = \angle C$.

Проведемо висоти BB_1 і CC_1 з вершин тупих кутів і розглянемо прямокутні трикутники ABB_1 і DCC_1 (рис. 42). У них $AB = CD$ як бічні

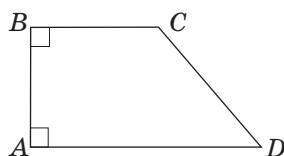


Рис. 40. Прямокутна трапеція $ABCD$

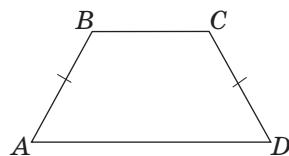


Рис. 41. Рівнобічна трапеція $ABCD$

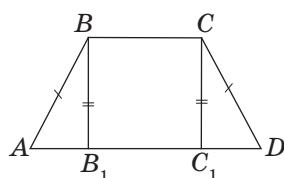


Рис. 42. Висоти, проведенні з вершин тупих кутів, відтинають від рівнобічної трапеції рівні трикутники

сторони рівнобічної трапеції, $BB_1=CC_1$ як відстані між паралельними прямими AD і BC . Отже, $\triangle ABB_1=\triangle DCC_1$ за гіпотенузою і катетом. Звідси випливає, що $\angle A=\angle D$. Кути трапеції B і C також рівні, оскільки вони доповнюють рівні кути A і D до 180° .

Теорему доведено. ■

Справджується також обернене твердження
(ознака рівнобічної трапеції)

Якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція є рівнобічною.

Доведіть цей факт самостійно.



Задача

Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

Розв'язання

Нехай дано рівнобічну трапецію $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $BD \perp AB$ (рис. 43).

За умовою задачі трикутник BCD рівнобедрений з основою BD , тобто $\angle 1 = \angle 2$; з іншого боку, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD .

Нехай градусна міра кута 1 дорівнює x , тоді в даній трапеції $\angle A = \angle D = 2x$, $\angle B = \angle C = x + 90^\circ$. Оскільки сума кутів, прилеглих до бічної сторони, становить 180° , маємо: $2x + x + 90^\circ = 180^\circ$; $3x = 90^\circ$; $x = 30^\circ$.

Отже, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Відповідь: 60° і 120° .

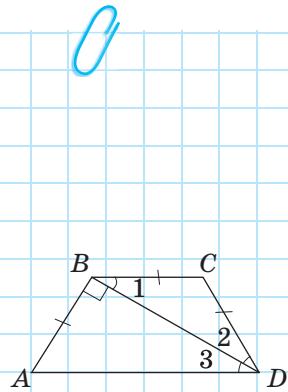


Рис. 43

5.3*. Побудова паралелограмів і трапецій

Задачі на побудову паралелограмів і трапецій часто розв'язують **методом допоміжного трикутника**. Нагадаємо, що для цього необхідно виділити в шуканій фігури трикутник, який можна побудувати за наявними даними. Побудувавши його, отримуємо дві або три вершини шуканого чотирикутника, а решту вершин знаходимо за даними задачі.

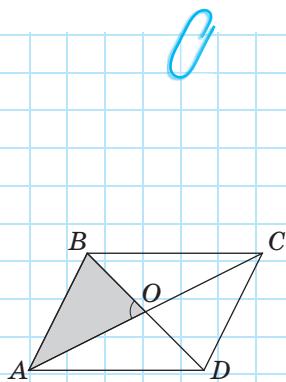


Рис. 44

Задача

Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

Розв'язання

Нехай d_1 і d_2 – дані діагоналі паралелограма, α – кут між ними.

Аналіз

Нехай паралелограм $ABCD$ побудовано (рис. 44). Трикутник AOB можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними $\left(AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}, \angle AOB = \alpha \right)$.

Таким чином, ми отримаємо вершини A і B шуканого паралелограма. Вершини C і D можна одержати, «подвоївши» відрізки AO і BO .

Побудова

1. Розділимо відрізки d_1 і d_2 навпіл.
2. Побудуємо трикутник AOB за двома сторонами і кутом між ними.
3. На променях AO і BO відкладемо відрізки $OC = AO$ і $OD = BO$.
4. Послідовно сполучимо точки B, C, D і A .

Доведення

Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, оскільки за побудовою його діагоналі AC і BD точкою перетину діляться навпіл. У цьому паралелограмі $\angle AOB = \alpha$ (за побудовою),

$$AC = \frac{d_1}{2} \cdot 2 = d_1, \quad BD = \frac{d_2}{2} \cdot 2 = d_2.$$

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок за будь-яких значень d_1 , d_2 і α .

У деяких випадках для побудови допоміжного трикутника на рисунку-екскізі необхідно провести додаткові лінії.

Задача

Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

Розв'язання

Нехай a і b ($a < b$) — основи шуканої трапеції, c і d — її бічні сторони.

Аналіз

Нехай шукану трапецію $ABCD$ побудовано (рис. 45). Проведемо через вершину C пряму CE , паралельну AB . Тоді $ABCE$ — паралелограм за означенням, отже, $CE = AB = c$. Крім того, $AE = BC = a$, отже, $ED = b - a$.

Допоміжний трикутник ECD можна побудувати за трьома сторонами. Після цього для отримання вершин A і B треба відкласти на промені DE і на промені з початком C , паралельному DE , відрізки завдовжки a .

Побудова

1. Побудуємо відрізок $b - a$.
2. Побудуємо трикутник ECD за трьома сторонами ($EC = c$, $CD = d$, $ED = b - a$).
3. Побудуємо промінь, який проходить через точку C і паралельний DE . При цьому побудований промінь і промінь DE мають лежати по один бік від прямої CD .

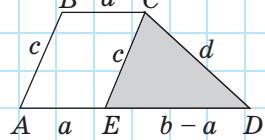


Рис. 45



4. На промені DE від точки E відкладемо відрізок $EA = a$, на промені з початком C — відрізок $CB = a$.
5. Сполучимо точки A і B .

Доведення

За побудовою $BC \parallel AD$, $BC = AE = a$, отже, $ABCE$ — паралелограм за ознакою. Звідси $AB = CE = c$. Крім того, $AD = a + b - a = b$, $CD = d$. Отже, $ABCD$ — шукана трапеція.

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок, якщо числа $b - a$, c і d задовольняють теорему про нерівність трикутника.

Запитання і задачі



Усні вправи

- 138.** Чи можуть основи трапеції дорівнювати одна одній? Чому?
- 139.** Чи можуть бути рівними:
 - а) сусідні кути трапеції;
 - б) протилежні кути трапеції?
- 140.** Чи обов'язково кути трапеції, прилеглі до більшої основи, є гострими? Наведіть приклади.
- 141.** Чи може рівнобічна трапеція бути прямокутною?
- 142.** Чи може висота трапеції бути більшою за бічну сторону; дорівнювати бічній стороні?
- 143.** Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O .
 - а) Чи може трикутник AOD дорівнювати трикутнику BOC ?
 - б) Чи може трикутник AOB дорівнювати трикутнику DOC ?
- 144.** Чи може точка перетину діагоналей трапеції бути серединою кожної з них; однієї з них?



Графічні вправи

- 145.** Накресліть паралелограм $ABCD$ і проведіть у ньому висоту CH так, щоб утворилася трапеція $ABCH$.
 - а) Визначте вид трапеції $ABCH$.
 - б) Чи є висотою трапеції будь-яка висота паралелограма? Наведіть контрприклад.

 **146.** Накресліть рівнобедрений трикутник AMD з основою AD . Позначте на стороні AM точку B і проведіть через неї пряму, паралельну AD . Позначте точку C — точку перетину цієї прямої зі стороною MD .

- Визначте вид трапеції $ABCD$.
- Проведіть діагоналі трапеції. Виміряйте і порівняйте їх довжини.



Письмові вправи

Рівень А

 **147.** Знайдіть невідомі кути:

- трапеції $ABCD$ з основами AD і BC , якщо $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$;
- рівнобічної трапеції, один із кутів якої дорівнює 58° ;
- прямокутної трапеції, найбільший кут якої утричі більший за найменший кут.

 **148.** Знайдіть невідомі кути:

- рівнобічної трапеції, в якій висота, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 22° ;
- прямокутної трапеції, яку діагональ, проведена з вершини тупого кута, ділить на два рівнобедрені прямокутні трикутники.

149. У рівнобічній трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 30 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

 **150.** Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо висота, проведена з вершини тупого кута, ділить її на відрізки, один із яких дорівнює 3 см.

151. Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180° .

Рівень Б

152. Знайдіть кути:

- рівнобічної трапеції, якщо різниця двох її протилежних кутів дорівнює 80° ;
- прямокутної трапеції, в якій діагональ є бісектрисою тупого кута й утворює з меншою бічною стороною кут 35° .

 **153.** Знайдіть кути:

- прямокутної трапеції, якщо відношення найбільшого і найменшого з них дорівнює $3:2$;
- рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні і вдвічі менша за більшу основу.

154. У трапеції $ABCD$ через вершину B проведено пряму BK , паралельну стороні CD (рис. 46).

- Доведіть, що $KBCD$ — паралелограм.
- Знайдіть периметр трапеції, якщо $BC = 4$ см, $P_{\triangle ABK} = 11$ см.

 **155.** У рівнобічній трапеції середина більшої основи сполучена з вершинами меншої основи. При цьому утворилися три рівносторонні трикутники. Знайдіть:

- кути трапеції;
- периметр трапеції, якщо периметр одного трикутника дорівнює 12 м.

156. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60° . Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 15 см.

 **157.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її тупий кут. Знайдіть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 10 см.

158. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, перпендикулярні.

159. Побудуйте:

- паралелограм за двома сторонами й діагоналлю;
- ромб за стороною і діагоналлю;
- рівнобічу трапецію за більшою основою, бічною стороною і гострим кутом.

 **160.** Побудуйте:

- ромб за кутом і діагоналлю, протилежною цьому куту;
- прямокутник за діагоналлю і кутом між діагоналями;
- прямокутну трапецію за меншою основою, більшою бічною стороною і більшою діагоналлю.

Рівень В

161. Діагональ ділить рівнобічу трапецію на два рівнобедрені трикутники. Знайдіть кути трапеції.

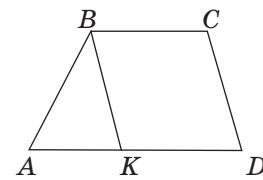


Рис. 46

162. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють $2a$, а довжини основ — $7a$ і $9a$. Знайдіть кути трапеції.

163 (опорна). *Діагоналі рівнобічної трапеції рівні, і навпаки: якщо діагоналі трапеції рівні, то вона рівнобічна.* Доведіть.

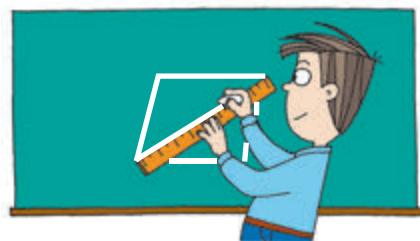
164 (опорна). *Діагоналі рівнобічної трапеції утворюють з її основою рівні кути, і навпаки: якщо діагоналі трапеції утворюють з її основою рівні кути, то трапеція рівнобічна.* Доведіть.

165. Побудуйте:

- паралелограм за стороною, діагоналлю і кутом, протилежним цій діагоналі;
- ромб за висотою і діагоналлю;
- трапецію за основами і діагоналями.

166. Побудуйте:

- прямокутник за діагоналлю й периметром;
- ромб за висотою і гострим кутом;
- рівнобічну трапецію за різницею основ, бічною стороною і діагоналлю.



Повторення перед вивченням § 6

Теоретичний матеріал

- ознаки паралельних прямих;
- властивості паралельних прямих.



7 клас, § 14, 15

Задачі

167. Точки D , E і F — середини сторін AB , BC і AC рівностороннього трикутника ABC відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ADEF$ — ромб. Назвіть інші ромби, трьома вершинами яких є точки D , E і F .

168. Відрізки AD і CE — рівні висоти трикутника ABC . Доведіть, що трикутник DBE рівнобедрений.



Видатні математики України



Погорелов Олексій Васильович (1919–2002)

У 80-х роках минулого століття Американське математичне товариство випустило серію книжок під загальною назвою «Видатні математики ХХ століття». Під номером 4 вийшов том з монографією харківського вченого Олексія Васильовича Погорелова. На обкладинці видання під його фотографією в стислій анотації вчений був названий «найбільшим геометром ХХ століття».

Справді, головною справою життя Олексія Васильовича була геометрія. Його праці охоплюють найширший діапазон: від підручників для школярів і студентів до робіт з надскладних питань теоретичної та прикладної математики, розрахованих на вузьке коло фахівців.

Шкільний підручник з геометрії Погорелова можна сміливо назвати революційним, адже в ньому була започаткована стисла і прозора система аксіом. З того часу аксіоматичний підхід у вивченні геометрії — невід'ємна складова розвитку наукового мислення школярів. Підручник Олексія Васильовича зі шкільної геометрії витримав більш ніж 20 видань!

Олексій Васильович Погорелов, пройшовши шлях від переможця міської математичної олімпіади для школярів до академіка Академії наук України, ще за життя був визнаний генієм. Але він був надзвичайно скромною людиною. Як згадують його сучасники, він ніколи ні за яких обставин не демонстрував свою перевагу над іншими. Майже все своє життя вчений працював у Харкові, керував кафедрою геометрії в Харківському державному університеті та відділом геометрії у фізико-технічному інституті низьких температур. У пам'ять про академіка О. В. Погорелова на будівлях цих всесвітньовідомих наукових центрів встановлено меморіальні дошки. Одній з аудиторій математичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна присвоєно ім'я Олексія Васильовича Погорелова.

§6

Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції

6.1. Теорема Фалеса

Для подальшого вивчення властивостей трапеції доведемо важливу теорему.

Теорема (Фалеса)

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій стороні.

Доведення

□ Нехай A_1, A_2, A_3 — точки перетину паралельних прямих з однією зі сторін даного кута, а B_1, B_2, B_3 — відповідні точки перетину цих прямих з іншою стороною кута. Доведемо, що коли $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$ (рис. 47).

Проведемо через точку B_2 пряму CD , паралельну A_1A_3 (рис. 48). Чотирикутники $A_2A_1CB_2$ і $A_3A_2B_2D$ — паралелограми за означенням. Тоді $A_1A_2 = CB_2$, $A_2A_3 = B_2D$, а оскільки $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$.

Розглянемо трикутники B_1B_2C і B_3B_2D . У них $CB_2 = B_2D$ за доведеним, $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, а $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_1B_1 і A_3B_3 та січній CD . Отже, $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$ за другою ознакою, звідки $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорему доведено. ■

Зазначимо, що в умові даної теореми замість сторін кута можна розглядати дві довільні прямі, тому теорема Фалеса може формулюватись і так:

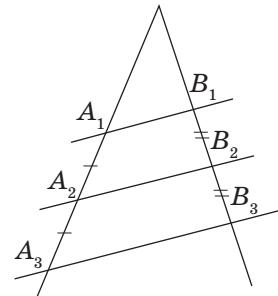


Рис. 47. Теорема Фалеса

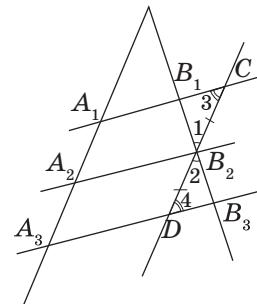


Рис. 48. До доведення теореми Фалеса

паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій прямій.

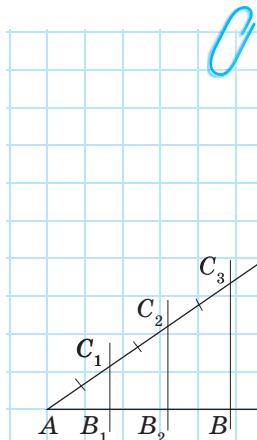


Рис. 49. Поділ відрізка на рівні частини

Задача

Поділіть даний відрізок на n рівних частин.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу для $n = 3$, тобто поділимо даний відрізок AB на три рівні частини (рис. 49).

Для цього проведемо з точки A довільний промінь, не доповняльний до променя AB , і відкладемо на ньому рівні відрізки AC_1 , C_1C_2 і C_2C_3 . Проведемо пряму C_3B і паралельні їй прямі через точки C_1 і C_2 . За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізок AB на три рівні частини.

Аналогічно можна поділити довільний відрізок на будь-яку кількість рівних частин.

Подумайте, як може застосувати теорему Фалеса у своїй практичній діяльності архітектор.

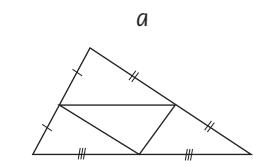
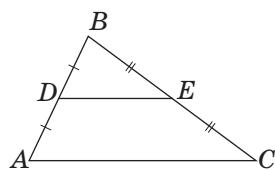


Рис. 50. Середня лінія трикутника

6.2. Середня лінія трикутника

Теорема Фалеса допомагає дослідити ще одну визначну лінію в трикутнику.

Означення

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін.

На рис. 50, а відрізок DE — середня лінія трикутника ABC . У будь-якому трикутнику можна провести три середні лінії (рис. 50, б).

Теорема (властивість середньої лінії трикутника)

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Доведення

□ Нехай DE — середня лінія трикутника ABC (рис. 51). Доведемо спочатку, що $DE \parallel AC$. Проведемо через точку D пряму, паралельну AC .

За теоремою Фалеса вона перетне відрізок BC в його середині, тобто міститиме відрізок DE . Отже, $DE \parallel AC$.

Проведемо тепер середню лінію EF . За щойно доведеним вона буде паралельна стороні AB . Чотирикутник $ADEF$ з попарно паралельними сторонами за означенням є паралелограмом, звідки $DE = AF$. А оскільки точка F — середина AC , то

$$DE = \frac{1}{2} AC.$$

Теорему доведено. ■

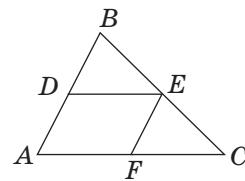


Рис. 51. До доведення властивості середньої лінії трикутника

Опорна задача (теорема Варіньйона)

Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. Доведіть.

Розв'язання

Нехай точки K, L, M, N — середини сторін чотирикутника $ABCD$ (рис. 52). Проведемо діагональ BD . Відрізки KN і ML — середні лінії трикутників ABD і CBD відповідно. За властивістю середньої лінії трикутника вони паралельні стороні BD і дорівнюють її половині, тобто паралельні й рівні між собою. Тоді за ознакою паралелограма чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

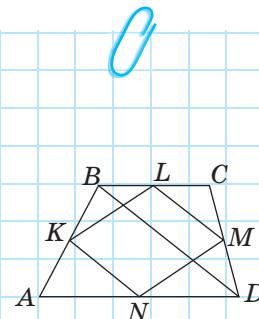


Рис. 52. Середини сторін чотирикутника $ABCD$ — вершинами паралелограма

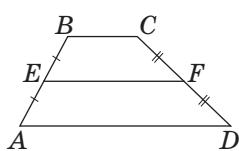


Рис. 53. Середня лінія трапеції

6.3. Середня лінія трапеції

Означення

Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції.

На рис. 53 відрізок EF — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема (властивість середньої лінії трапеції)

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Доведення

□ Нехай EF — середня лінія трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (рис. 54). Проведемо пряму BF і позначимо точку G — точку перетину прямих BF і AD . Розглянемо трикутники BFC і GFD . У них $FC = FD$, оскільки F — середина CD , $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, а $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній CD . Отже, $\triangle BFC = \triangle GFD$ за другою ознакою, звідки $BF = FG$. Тоді за означенням EF — середня лінія трикутника ABG . За властивістю середньої лінії $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AD + DG) = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорему доведено. ■

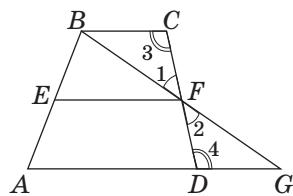


Рис. 54. До доведення властивості середньої лінії трапеції

$$\begin{aligned} EF &= \frac{1}{2}AG = \\ &= \frac{1}{2}(AD + DG) = \frac{1}{2}(AD + BC). \end{aligned}$$

Задача

Через точки, які ділять бічну сторону трапеції на три рівні частини, проведено прямі, паралельні основам трапеції. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що містяться всередині трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 м і 5 м.

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AA_1 = AA_2 = A_2B$ (рис. 55). За теоремою Фалеса паралельні прямі, що проходять через точки A_1 і A_2 , відтинають на бічній стороні CD рівні відрізки, тобто $DD_1 = D_1D_2 = D_2C$. Тоді за означенням A_1D_1 — середня лінія трапеції AA_2D_2D , A_2D_2 — середня лінія трапеції A_1BCD_1 . Нехай $A_1D_1 = x$ м, $A_2D_2 = y$ м. За властивістю середньої лінії трапеції маємо систему:

$$\begin{cases} x = \frac{y+5}{2}, \\ y = \frac{x+2}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2y - x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 3. \end{cases}$$

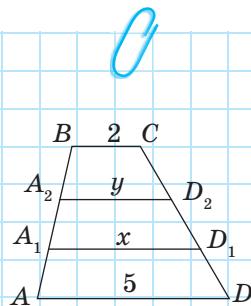


Рис. 55

Відповідь: 3 м і 4 м.

Запитання і задачі**Усні вправи**

- 169.** Відрізок DE — середня лінія трикутника ABC (рис. 50, а).
- Визначте вид чотирикутника $ADEC$.
 - Назвіть медіану трикутника, що виходить із вершини A .
- 170.** Чи може середня лінія трикутника бути перпендикуляром до його сторони; до двох його сторін?
- 171.** Чи можуть середні лінії трикутника дорівнювати 3 см, 4 см і 10 см? Чому?
- 172.** У трикутнику ABC проведено середню лінію DE , паралельну стороні AC . У якому відношенні пряма DE ділить медіану BM ; висоту BH ?
- 173.** Середини основ трапеції сполучені відрізком. Чи є він середньою лінією трапеції?
- 174.** Чи може середня лінія трапеції бути меншою за обидві її основи; дорівнювати одній з основ?
- 175.** Чи може середня лінія трапеції проходити через точку перетину діагоналей? Чому?



Графічні вправи

176. Накресліть трикутник ABC . Позначте на стороні AB точки A_1 , A_2 і A_3 так, щоб вони ділили відрізок AB на чотири рівні частини. Проведіть через ці точки прямі, паралельні стороні AC , і позначте точки їх перетину зі стороною BC C_1 , C_2 і C_3 відповідно.

- Виміряйте і порівняйте довжини відрізків, на які точки C_1 , C_2 і C_3 ділять сторону BC .
- Виділіть червоним кольором середню лінію трикутника ABC .
- Виділіть синім кольором середню лінію трапеції AA_2C_2C .

177. Накресліть трикутник ABC . Позначте точки D , E і F — середини сторін AB , BC і AC відповідно. Сполучіть позначені точки.

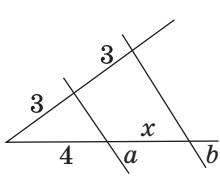
- Визначте вид чотирикутника $ADEF$.
- Визначте вид чотирикутника $ADEC$.
- Назвіть усі трикутники, що дорівнюють трикутнику DEF . Запишіть відповідні рівності.



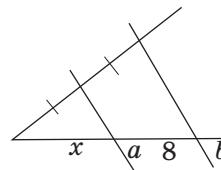
Письмові вправи

Рівень А

178. За даними рисунка 56 знайдіть x , якщо $a \parallel b$.



a



b

Рис. 56

179. Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна AC і перетинає сторону BC в точці E . Знайдіть BC , якщо $BE = 8$ см.

180. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть сторони трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

-  **181.** Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 3,5 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 182.** Доведіть, що середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.
- 183.** Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію з бічними сторонами 3 м і 4 м і меншою основою 5 м. Знайдіть периметр трикутника.
-  **184.** Діагоналі чотирикутника дорівнюють 18 см і 22 см. Знайдіть периметр паралелограма, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.
- 185.** Знайдіть:
- середню лінію трапеції з основами 8 см і 12 см;
 - основи трапеції, в якій діагональ ділить середню лінію на відрізки завдовжки 3 см і 4 см.
-  **186.** Знайдіть:
- середню лінію рівнобічної трапеції з бічною стороною 5 см і периметром 26 см;
 - основи трапеції, якщо одна з них більша за іншу на 6 см, а середня лінія трапеції дорівнює 5 см.
- 187.** Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.
-  **188.** Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

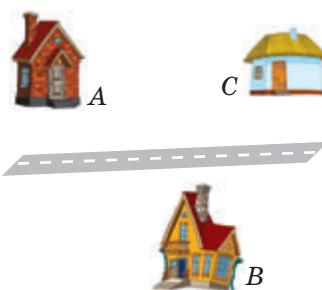
Рівень Б

- 189.** Пряма, яка паралельна основі рівнобедреного трикутника і проходить через середину бічної сторони, відтинає від даного трикутника трапецію. Знайдіть її периметр, якщо периметр даного трикутника дорівнює 26 см, а основа відноситься до бічної сторони як 5:4.

-  **190.** Середні лінії трикутника відносяться як 4:5:6. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.

- 191.** Прямолінійна траса ділить навпіл відстань між будинками *A* і *B* та відстань між будинками *B* і *C*. Доведіть, що ці три будинки рівновіддалені від цієї траси.

-  **192.** Доведіть, що середини сторін рівнобедреної трапеції є вершинами ромба.



193. Як побудувати трикутник, якщо задано середини його сторін?

194. Як розрізати трикутник на дві частини так, щоб із них можна було скласти паралелограм?

195. Прямокутна трапеція ділиться діагональю на рівносторонній трикутник зі стороною a і прямокутний трикутник. Знайдіть середню лінію трапеції.

196. Кінці діаметра кола віддалені від дотичної до цього кола на 14 см і 20 см. Знайдіть діаметр кола.

197. Точки A і B лежать по один бік від прямої l і віддалені від неї на 7 см і 11 см відповідно. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої l .

198. Бічну сторону рівнобедреного трикутника поділено на чотири рівні частини. Через точки поділу проведено прямі, паралельні основі трикутника. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться всередині трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.

Рівень В

199. Точки M і N — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AM і CN ділять діагональ BD на три рівні частини.

200. Поділіть даний відрізок у відношенні 3 : 2.

201. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює їх піврізниці. Розв'яжіть задачу 197 за умови, що точки A і B лежать по різні боки від прямої l .

202. Середина бічної сторони рівнобічної трапеції з основами a і b ($a < b$) сполучена з основою її висоти (рис. 57). Доведіть, що:

$$\text{а)} \quad HD = \frac{b-a}{2};$$

$$\text{б)} \quad AH = MN = \frac{a+b}{2}.$$

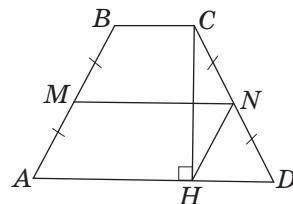


Рис. 57

 **203.** У рівнобічній трапеції діагональ завдовжки 4 см утворює з основою кут 60° . Знайдіть середню лінію трапеції.

 **204.** а) У трикутнику ABC кожну з бічних сторін AB і BC розділено на m рівних частин (рис. 58). Доведіть, що відрізки, які сполучають відповідні точки поділу, паралельні між собою і паралельні стороні AC .

б) Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження для трапеції.

в) Сформулюйте твердження, обернене до теореми Фалеса, і спростуйте його за допомогою контрприкладу.

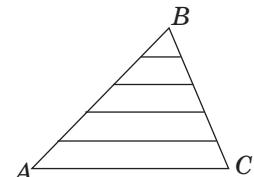


Рис. 58



Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- зовнішній кут трикутника;
- коло;
- коло, описане навколо трикутника;
- геометричне місце точок.



7 клас, § 19, 22



7 клас, п. 16.3, 23.1

Задачі

205. Через вершину рівностороннього трикутника, вписаного в коло, проведено пряму, паралельну його стороні. Доведіть, що ця пряма є дотичною до кола.

206. Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Знайдіть кути трикутника.

§ 7

Вписані кути

7.1. Градусна міра дуги

У сьому му класі вивчення властивостей трикутників завершувалося розглядом описаного і вписаного кіл. Але перед тим як розглянути описане і вписане кола для чотирикутника, нам необхідно зупинитися на додаткових властивостях кутів.

До цього часу розглядалися лише кути, градусна міра яких не перевищувала 180° . Розширимо поняття кута, ввівши до розгляду разом із самим кутом частини, на які він ділить площину.

На рис. 59 кут (ab) ділить площину на дві частини, кожна з яких називається **плоским кутом**. Їхні градусні міри дорівнюють α і $(360^\circ - \alpha)$.

Застосуємо поняття плоского кута для означення центрального кута у колі.

Означення

Центральним кутом у колі називається плоский кут з вершиною в центрі кола.

На рис. 60, а, б сторони кута з вершиною в центрі кола O перетинають дане коло в точках A і B . При цьому утворюються дві дуги, одна з яких менша від півкола (на ній позначена проміжна точка L , рис. 60, а), а інша — більша за півколо (на ній позначена проміжна точка M , рис. 60, б).

Для того щоб уточнити, який з двох плоских кутів зі сторонами OA і OB ми розглядаємо як центральний, ми будемо вказувати дугу кола, яка *відповідає даному центральному куту* (тобто міститься всередині нього).

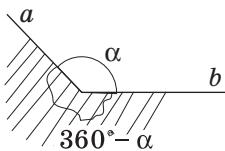


Рис. 59.
Кути на площині



На рис. 60, а центральному куту AOB , позначеному дужкою, відповідає дуга ALB , а на рис. 60, б — дуга AMB . У випадку, коли промені OA і OB доповняльні, відповідна дуга ANB є півколом (рис. 60, в).

Означення

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

Градусну міру дуги, як і саму дугу, коротко позначають так: $\cup ALB$ (або $\cup AB$). Наприклад, на рис. 60, в $\cup ANB = 180^\circ$, тобто градусна міра півкола становить 180° . Очевидно, що градусна міра дуги всього кола становить 360° .

Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги — ALB і AMB (рис. 60, г). Кажуть, що ці дуги *стягуються хордою AB* .

7.2. Вписаний кут

Означення

Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.

На рис. 61 зображене вписаний кут ABC . Його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C . Дуга AC (на рисунку вона відлена) лежить усередині цього кута. У такому випадку кажуть, що вписаний кут ABC *спирається на дугу AC* .

Теорема (про вписаний кут)

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

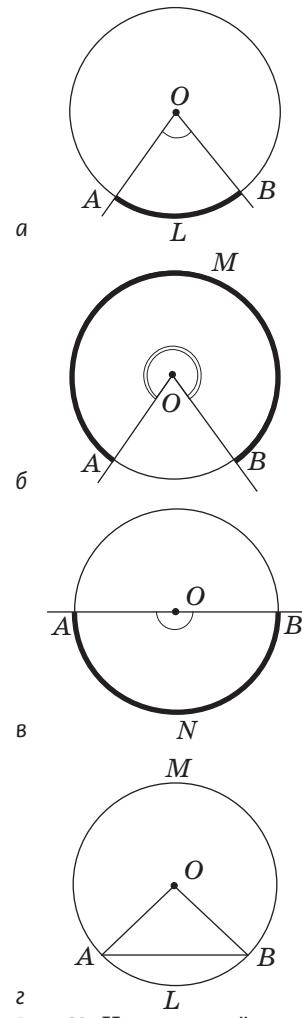


Рис. 60. Центральний кут і дуга кола

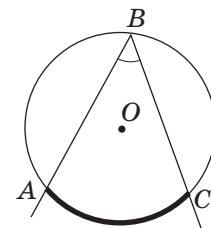


Рис. 61. Вписаний кут ABC

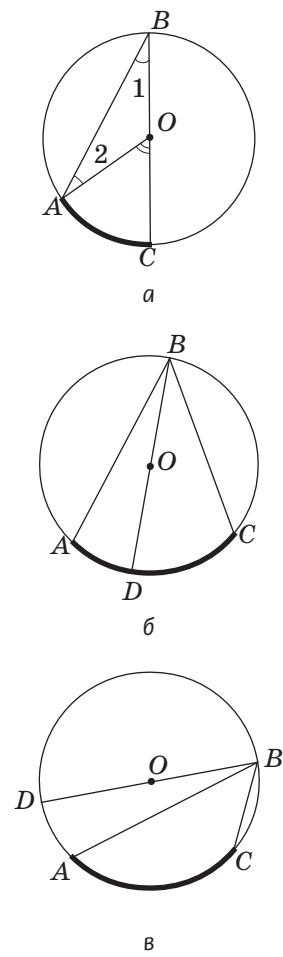


Рис. 62. Вимірювання вписаного кута ABC

Доведення

□ Нехай у колі з центром O вписаний кут ABC спирається на дугу AC . Доведемо, що

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC. \text{ Розглянемо три випадки розмі-}$$

щення центра кола відносно даного вписаного кута (рис. 62, а–в).

1) Нехай центр кола лежить на одній зі сторін даного кута (рис. 62, а). У цьому випадку центральний кут AOC є зовнішнім кутом при вершині O рівнобедреного трикутника AOB . За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$. А оскільки кути 1 і 2 рівні як кути при основі рівнобедреного трикутника, то $\angle AOC = 2\angle ABC$, тобто

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

2) Нехай центр кола лежить усередині кута ABC (рис. 62, б). Промінь BO ділить кут ABC на два кути. За щойно доведеним $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$, отже,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3) Аналогічно у випадку, коли центр кола лежить поза вписаним кутом (рис. 62, в),

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup DC - \cup AD) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Теорему доведено. ■

Щойно доведену теорему можна сформулювати інакше.

Вписаний кут дорівнює половині центрального кута, який спирається на ту саму дугу.

Задача

Знайдіть кут BDC , якщо $\angle BCA = 50^\circ$ (рис. 63).

Розв'язання

Для того щоб знайти кут BDC , необхідно знайти градусну міру дуги BC , на яку він спирається. Але безпосередньо з даних задачі ми можемо знайти лише градусну міру дуги AB , на яку спирається кут BCA : з теореми про вписаний кут $\angle A = 2\angle BCA = 100^\circ$. Зазначимо, що дуги AB і BC разом складають півколо, тобто $\angle A + \angle BC = 180^\circ$, отже, $\angle BC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Тоді за теоремою про вписаний кут $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BC = 40^\circ$.

Відповідь: 40° .

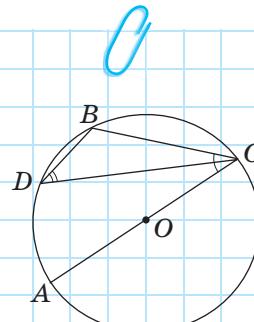


Рис. 63

7.3. Наслідки з теореми про вписаний кут

За кількістю і значущістю наслідків теорема про вписаний кут є однією з «найбагатших» геометричних теорем. Сформулюємо найважливіші з цих наслідків.

Наслідок 1

Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.

Справді, за теоремою про вписаний кут градусна міра кожного з вписаних кутів на рис. 64 дорівнює половині дуги AB .

Наслідок 2

Вписаний кут, що спирається на півколо,— прямий, і навпаки: будь-який прямий вписаний кут спирається на півколо.

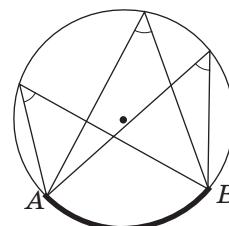


Рис. 64. Вписані кути, що спираються на дугу AB , рівні

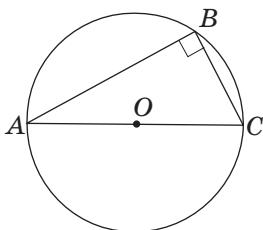
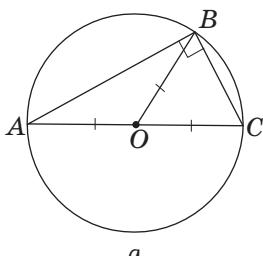
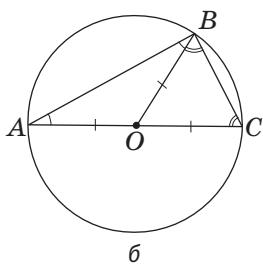


Рис. 65. Вписаний кут, що спирається на півколо, — прямий



a



b

Рис. 66. Прямоугольний трикутник ABC вписаний у коло

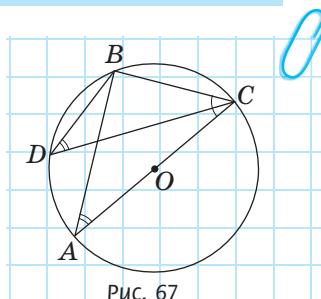


Рис. 67

Справді, оскільки градусна міра півколо дорівнює 180° , то кут ABC , що спирається на півколо, дорівнює 90° (рис. 65). Обґрунтуйте обернене твердження самостійно.

Наслідок 3

Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Перше з наведених тверджень випливає з наслідку 2. Якщо у трикутнику ABC кут ABC прямий (рис. 66, а), то дуга AC , на яку спирається цей кут, є півколом. Тоді гіпотенуза AC — діаметр описаного кола, тобто її середина — центр кола. Твердження про довжину медіан випливає з рівності радіусів:

$$BO = AO = CO = \frac{1}{2} AC.$$

Відзначимо ще один цікавий факт: медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить даний трикутник на два рівнобедрені трикутники зі спільною бічною стороною. Із цього, зокрема, випливає, що **кути, на які медіана ділить прямий кут, дорівнюють гострим кутам трикутника** (рис. 66, б).

Як приклад застосування наслідків з теореми про вписаний кут розглянемо інше розв'язання тієї самої задачі, яку ми щойно розглянули в п. 7.2.

Задача

Знайдіть кут BDC , якщо $\angle BCA = 50^\circ$ (див. рис. 63).

Розв'язання

Проведемо хорду AB (рис. 67). Оскільки вписаний кут ABC спирається на півколо, то за наслідком 2 $\angle ABC = 90^\circ$. Отже, трикутник ABC прямокут-

ний, $\angle BCA = 50^\circ$, тоді $\angle BAC = 40^\circ$. За наслідком 1 кути BAC і BDC рівні, оскільки обидва вони спираються на дугу BC . Отже, $\angle BDC = \angle BAC = 40^\circ$.



Відповідь: 40° .

Запитання і задачі



Усні вправи

207. Визначте, чи є вписаний у коло кут ABC гострим, прямим або тупим, якщо:

- а) дуга ABC цього кола менша за півколо;
- б) дуга ABC цього кола більша за півколо;
- в) дуга ABC цього кола дорівнює півколу.

208. Сторона вписаного кута проходить через центр кола (див. рис. 62, а). Чи може даний кут бути тупим; прямим?

209. Три футболісти пробивають штрафні удали по воротах із точок A , B і C , які лежать на колі (рис. 68). У кого з них кут обстрілу воріт найбільший?

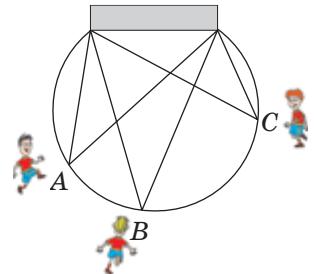


Рис. 68

210. Чи можуть два вписані кути дорівнювати один одному, якщо вони не спираються на одну дугу?

211. Чи можуть вписані кути ABC і AB_1C не дорівнювати один одному? Наведіть приклад.

212. Чи може:

- а) кут, сторони якого перетинають коло в кінцях діаметра, бути гострим;
- б) кут із вершиною на колі, сторони якого перетинають коло в кінцях діаметра, бути гострим?

213. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10. Чи може висота, проведена до неї, дорівнювати 6? Відповідь обґрунтуйте.



Графічні вправи

214. Накресліть коло з центром у точці O і позначте на ньому точки A , B і C .

а) Виділіть двома кольорами два кути, утворені променями OA і OC .

б) Яким кольором виділено кут, що вдвічі більший за кут ABC ?

в) Позначте на колі точку D так, щоб вписані кути ABC і ADC були рівні.

215. Накресліть коло з центром O і проведіть його діаметр AB .

а) Позначте на колі точку C і виміряйте кут ACB . Поясніть отриманий результат.

б) Накресліть і виділіть червоним кольором центральний кут, який удвічі більший за кут ABC .



Письмові вправи

Рівень А

216. У колі побудовано центральний кут. Знайдіть градусні міри утворених дуг, якщо:

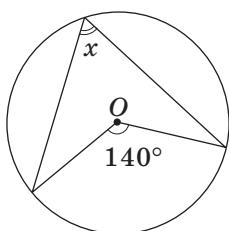
а) одна з них більша за іншу на 120° ;

б) вони відносяться як $2 : 7$.

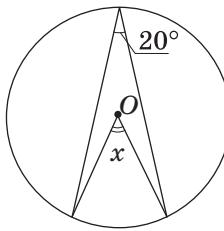
217. Знайдіть градусну міру дуги, яка складає:

а) чверть кола; б) третину кола; в) $\frac{5}{18}$ кола.

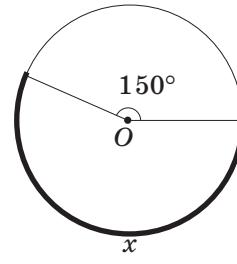
218. За даними рис. 69 знайдіть градусну міру x (точка O — центр кола).



а



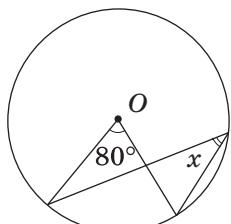
б



в

Рис. 69

 **219.** За даними рис. 70 знайдіть кут x (точка O — центр кола).



a

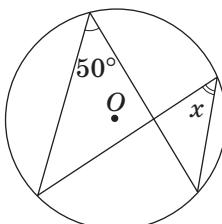
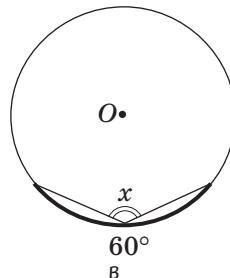


Рис. 70



b

220. На колі позначено точки A , B , C і D . Знайдіть кут ABC , якщо $\angle ADC = \alpha$. Скільки розв'язків має задача?

 **221.** На колі позначено точки A , B і C , причому хорда AC дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут ABC . Скільки розв'язків має задача?

222. Трикутник ABC вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку AB . Знайдіть:

- кут B , якщо $\angle A = 65^\circ$;
- медіану, проведену з вершини C , якщо $AB = 12$ см.

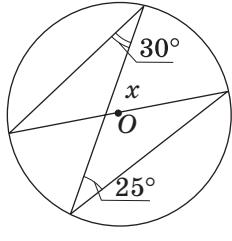
 **223.** Відрізок AC — діаметр кола з центром O , а точка B лежить на цьому колі. Знайдіть:

- кут між хордами BA і BC ;
- відрізок AC , якщо $BO = 5$ см.

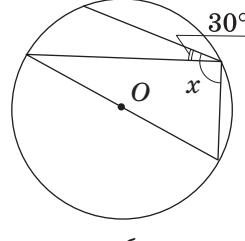
224. Доведіть, що бісектриса вписаного кута ділить навпіл дугу, на яку він спирається.

Рівень Б

225. За даними рис. 71 знайдіть кут x (точка O — центр кола).



a



b

Рис. 71

 **226.** За даними рис. 72 знайдіть кут x (точка O — центр кола).

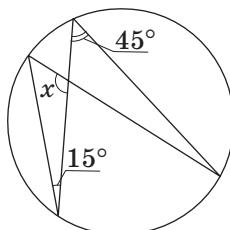
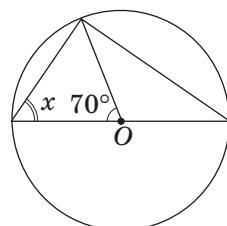
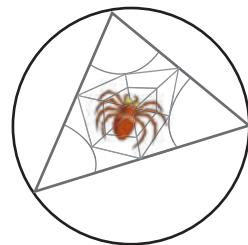
*a**б*

Рис. 72

227. Хорда AC ділить коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як $11:7$. Знайдіть кут ABC , якщо точка B лежить на більшій дузі.

228. Знайдіть кути вписаного трикутника, якщо його вершини ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як $3:4:5$.

 **229.** Сторона рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, стягує дугу в 100° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?



230 (опорна). Кут між хордою і дотичною до кола, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, яка лежить усередині цього кута. Доведіть.

231 (опорна).

а) Дуги кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні. Доведіть.

б) Якщо дві дуги кола рівні, то рівні й хорди, які їх стягують. Доведіть. Користуючись рисунком, сформулюйте і доведіть обернене твердження.

 **232.** Хорда кола стягує дугу 100° . Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цієї хорди.

233. На колі позначено точки A , B і C , причому AC — діаметр кола, $\angle BCA = 60^\circ$, $BC = 4$ см. Знайдіть радіус кола.

 **234.** Знайдіть менший катет прямокутного трикутника, якщо його медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 9 см і утворює з гіпотенузою кут 60° .

Рівень В

235 (опорна). Центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника, лежить усередині трикутника, а центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника,— поза трикутником. Доведіть.

236 (опорна). Кут із вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша — між їх продовженнями. Доведіть.

237 (опорна). Кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами. Доведіть.

238. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

 **239.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною з вершини цього кута.

240. Знайдіть геометричне місце вершин прямих кутів, сторони яких проходять через кінці відрізка AB .

 **241.** Знайдіть геометричне місце точок, із яких даний відрізок AB видно під заданим кутом α .

 **242.** Точка A лежить поза даним колом з центром O . Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через точку A .



Повторення перед вивченням § 8

Теоретичний матеріал

- описане і вписане кола;
- властивість відрізків дотичних;
- теорема про бісектрису кута.

 7 клас, § 23

 7 клас, п. 21.3, 22.2

Задачі

243. У рівнобедрений трикутник із кутом при основі 40° вписано коло. Знайдіть кут між радіусами, проведеними в точки дотику кола з бічними сторонами трикутника.

244. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 9 см починаючи від основи.

§8

Вписані й описані чотирикутники

8.1. Вписані чотирикутники

Означення

Чотирикутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Чотирикутник $ABCD$ на рис. 73 є вписаним у коло. Інакше кажуть, що **коло описане навколо чотирикутника**.

Як відомо, навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Для чотирикутника це можна зробити не завжди. Доведемо властивість і ознаку вписаного чотирикутника.

Теорема (властивість вписаного чотирикутника)

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° .

Доведення

□ Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (рис. 73). За теоремою про вписаний кут

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB.$$

Отже, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Аналогічно доводимо, що $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Теорему доведено. ■

Теорема (ознака вписаного чотирикутника)

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

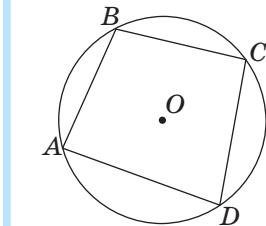


Рис. 73. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло



Доведення*

□ Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Опишемо коло навколо трикутника ABC і доведемо від супротивного, що вершина D не може лежати ні всередині цього кола, ні поза ним. Нехай точка D лежить усередині кола, а точка E — точка перетину променя AD з дугою AC (рис. 74). Тоді чотирикутник $ABCE$ — вписаний. За умовою $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а за щойно доведеною властивістю вписаного чотирикутника $\angle B + \angle E = 180^\circ$, тобто $\angle D = \angle E$. Але кут D чотирикутника $ABCD$ — зовнішній кут трикутника CDE , і за теоремою про зовнішній кут трикутника він має бути більшим за кут E . Отже, ми отримали суперечність, тобто точка D не може лежати всередині кола. Аналогічно можна довести, що точка D не може лежати поза колом (зробіть це самостійно). Тоді точка D лежить на колі, тобто навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Теорему доведено. ■

Наслідок 1

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

Якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником.

Прямокутник, вписаний у коло, зображенено на рис. 75. Центр описаного кола є точкою перетину діагоналей прямокутника (див. задачу 255).

Наслідок 2

Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло. Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна.

Рівнобічна трапеція, вписана в коло, зображена на рис. 76.

Приклади розв'язування задач про вписані чотирикутники подано в п. 8.4.

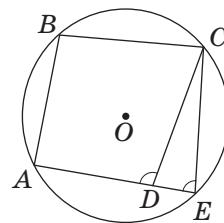


Рис. 74. До доведення від супротивного означення вписаного чотирикутника

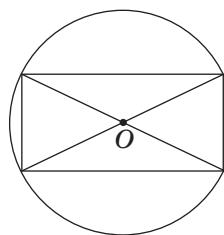


Рис. 75. Прямокутник, вписаний у коло

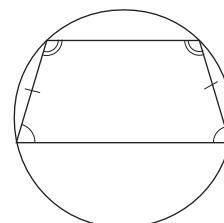


Рис. 76. Рівнобічна трапеція, вписана в коло

8.2. Описані чотирикутники

Означення

Чотирикутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

Чотирикутник $ABCD$ на рис. 77 є описаним навколо кола. Інакше кажуть, що коло вписане в чотирикутник.

Виявляється, що не в будь-який чотирикутник можна вписати коло. Доведемо відповідні властивість і ознаку.

Теорема (властивість описаного чотирикутника)

В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні.

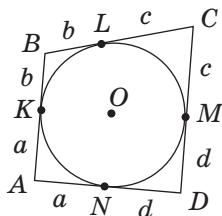


Рис. 77. Чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола

Доведення

□ Нехай сторони чотирикутника $ABCD$ дотикаються до вписаного кола в точках K, L, M та N (рис. 77). За властивістю відрізків дотичних $AK = AN, BK = BL, CL = CM, DM = DN$.

З урахуванням позначень на рисунку $AB + CD = a + b + c + d = AD + BC$. Теорему доведено. ■

Теорема (ознака описаного чотирикутника)

Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

Доведення*

□ Нехай у чотирикутнику $ABCD$ з найменшою стороною AB $AB + CD = AD + BC$. Оскільки за теоремою про бісектрису кута точка O (точка перетину бісектрис кутів A і B) рівновіддалена від сторін AB, BC і AD , то можна побудувати коло з центром O , яке дотикається до цих трьох сторін (рис. 78, а). Доведемо від супротивного, що це коло дотикається також до сторони CD .



Припустимо, що це не так. Тоді пряма CD або не має спільних точок із колом, або є січною кола. Розглянемо перший випадок (рис. 78, а). Проведемо через точку C дотичну до кола, яка перетинає сторону AD в точці D_1 . Тоді за властивістю описаного чотирикутника $ABCD_1$, $BC + AD_1 = AB + CD_1$. Але за умовою $BC + AD = AB + CD$. Віднімаючи від другої рівності першу, маємо: $AD - AD_1 = CD - CD_1$, тобто $DD_1 = CD - CD_1$, що суперечить нерівності трикутника для трикутника CD_1D .

Таким чином, наше припущення хибне. Аналогічно можна довести, що пряма CD не може бути січною кола (зробіть це самостійно). Отже, коло дотикається до сторони CD , тобто чотирикутник $ABCD$ описаний. Теорему доведено. ■

Зauważення. Нагадаємо, що в даних теоремах розглядаються лише опуклі чотирикутники.

Наслідок

У будь-який ромб можна вписати коло.

Якщо в паралелограм вписано коло, то він є ромбом.

Ромб, описаний навколо кола, зображенено на рис. 79. Центр вписаного кола є точкою перетину діагоналей ромба (див. задачу 265, а).

Задача

У рівнобічну трапецію з бічною стороною 6 см вписано коло. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана рівнобічна трапеція з основами AD і BC . За властивістю описаного чотирикутника $AB + CD = AD + BC = 12$ см. Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{AD + BC}{2}$, тобто 6 см.

Відповідь: 6 см.

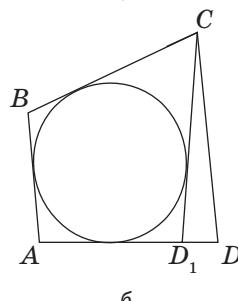
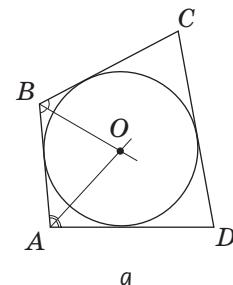


Рис. 78. До доведення
ознаки описаного
чотирикутника

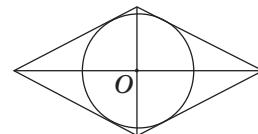


Рис. 79. Ромб, описаний навколо кола



Софізм – від грецького «софізма» – вигадка, виверт, головоломка

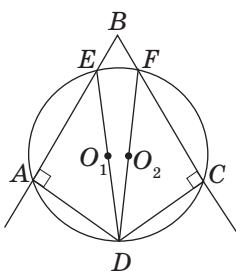


Рис. 80

8.3*. Геометричні софізми

Багатьом із вас, мабуть, відома давньогрецька байка про Ахіллеса, який ніяк не може наздогнати черепаху. Історія математики знає чимало прикладів того, як хибні твердження і помилкові результати видавалися за правильні, а їх спростування ставало поштовхом до справжніх математичних відкриттів. Отже, навіть помилки й невдачі можуть стати математикам у пригоді. Ці помилки залишилися в підручниках і посібниках у вигляді **софізмів** – свідомо хибних тверджень, доведення яких на перший погляд здаються правильними, але насправді такими не є. Пошук і аналіз помилок, які містяться в цих доведеннях, часто викривають причини неузгоджень у розв'язаннях інших задач. Тому в процесі навчання геометрії софізми інколи є навіть більш повчальними й корисними, ніж «безпомилкові» задачі й доведення.

Розглянемо приклад геометричного софізму, пов'язаного зі вписаними чотирикутниками.

Коло має два центри.

«Доведення»

Позначимо на сторонах довільного кута B точки A і C та проведемо через ці точки перпендикуляри до сторін BA і BC відповідно (рис. 80). Ці перпендикуляри мають перетинатися (адже якби вони були паралельні, то паралельними були б і сторони даного кута — обґрунтуйте це самостійно). Позначимо точку перетину перпендикулярів D .

Через точки A , D і C , які не лежать на одній прямій, проведемо коло (це можна зробити, оскільки коло, описане навколо трикутника ADC , існує і є єдиним). Позначимо точки E і F — точки перетину цього кола зі сторонами кута B . Прямі кути EAD і FCD є вписаними в коло. Отже, за наслідком з теореми

про вписані кути відрізки DE і DF є діаметрами кола, які мають спільний кінець D , але не збігаються. Тоді їх середини O_1 і O_2 є двома різними центрами одного кола, тобто коло має два центри.

Помилка цього «доведення» полягає в неправильності побудов на рис. 80. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, тобто він є вписаним у коло. Це означає, що в ході побудов коло, проведене через точки A , D і C , обов'язково пройде через точку B . У такому разі відрізки DE і DF збігатимуться з відрізком DB , середина якого і є єдиним центром побудованого кола.

Серед задач до цього і наступних параграфів ви знайдете інші приклади геометричних софізмів і зможете самостійно потренуватися в їх спростуванні. Сподіваємось, що досвід, якого ви при цьому набудете, допоможе уникнути подібних помилок під час подальшого розв'язування задач.



8.4*. Чотирикутник і коло в задачах. Метод допоміжного кола

У ході розв'язуванні задач про кола і чотирикутники іноді доцільно використовувати спеціальні підходи.

Один із них полягає в розгляді вписаного трикутника, вершини якого є вершинами даного вписаного чотирикутника.

Задача



Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, діагональ якої перпендикулярна до бічної сторони й утворює з основою кут 30° , якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 8 см.

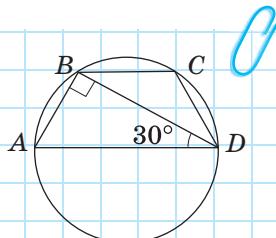


Рис. 81

Розв'язання

Нехай дано вписану трапецію $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BD \perp AB$, $\angle ADB = 30^\circ$ (рис. 81). Зауважимо, що коло, описане навколо трапеції, є водночас описаним навколо прямокутного трикутника ABD , отже, його центром є середина гіпотенузи AD . Тоді $AD = 2R = 16$ см. Із трикутника ABD $AB = 8$ см як катет, протилежний до кута 30° . Оскільки в прямокутному трикутнику ABD $\angle A = 60^\circ$, то кути при більшій основі трапеції дорівнюють 60° . $\angle ADB = \angle CBD$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD . Отже, в трикутнику BCD два кути рівні, тобто він є рівнобедреним з основою BD , звідки $BC = CD = AB = 8$ см. Тоді $P_{ABCD} = 16 + 8 + 8 + 8 = 40$ (см).

Відповідь: 40 см.

Особливо цікавим і нестандартним є застосування кола (як описаного, так і вписаного) під час розв'язування задач, в умовах яких коло не згадується.

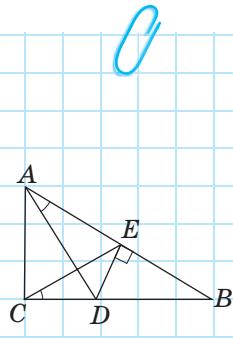


Рис. 82

Задача

Із точки D , яка лежить на катеті BC прямокутного трикутника ABC , проведено перпендикуляр DE до гіпотенузи AB (рис. 82). Доведіть, що $\angle DCE = \angle DAE$.

Розв'язання

У чотирикутнику $ACDE$ $\angle ACD + \angle AED = 180^\circ$, отже, навколо нього можна описати коло. У цьому колі вписані кути DCE і DAE спираються на одну й ту саму дугу, і за наслідком з теореми про вписаний кут $\angle DCE = \angle DAE$.

Метод розв'язування задач за допомогою додаткової побудови описаного або вписаного кола називають *методом допоміжного кола*.

Запитання і задачі



Усні вправи

245. У який прямокутник можна вписати коло?
Навколо якого ромба можна описати коло?

246. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, який має лише один прямий кут; лише два прямі кути?

247. Чи можна описати коло навколо прямокутної трапеції?

248. Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана навколо кола (рис. 83). Як побудувати точку M , щоб трикутник AMD був описаний навколо того самого кола?

249. У трапеції три сторони рівні. Чи можна в таку трапецію вписати коло? Чи можна навколо такої трапеції описати коло?

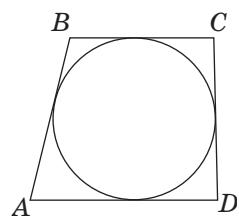


Рис. 83



Графічні вправи

250. Накресліть коло з центром O і позначте на ньому точки A , B , C і D так, щоб при їх послідовному сполученні утворився вписаний чотирикутник $ABCD$. Виміряйте кути A і B цього чотирикутника. Користуючись властивостями вписаного чотирикутника, обчисліть градусні міри кутів C і D . Перевірте отримані результати вимірюванням.

251. Накресліть коло з центром O і проведіть до нього чотири дотичні так, щоб при їх попарному перетині утворився описаний чотирикутник $ABCD$. Виміряйте довжини сторін AB , BC і CD цього чотирикутника. Користуючись властивостями описаного чотирикутника, обчисліть довжину сторони AD . Перевірте отриманий результат вимірюванням.



Письмові вправи

Рівень А

252. Визначте, чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A , B , C і D дорівнюють відповідно:

- $90^\circ, 90^\circ, 20^\circ, 160^\circ$;
- $5^\circ, 120^\circ, 175^\circ, 60^\circ$.

253. Знайдіть невідомі кути:

- вписаного чотирикутника, якщо два його кути дорівнюють 46° і 125° ;
- вписаної трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 80° ;
- вписаного чотирикутника, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл.



254. Знайдіть невідомі кути:

- вписаного чотирикутника $ABCD$, якщо кути A і C рівні, а кут D дорівнює 50° ;
- вписаної трапеції, якщо сума двох з них дорівнює 230° .

255 (опорна). Центр кола, описаного навколо прямокутника, є точкою перетину його діагоналей. Доведіть.

256. Із точки C , що лежить усередині гострого кута A , проведено перпендикуляри CB і CD до сторін кута. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.



257. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. Доведіть, що навколо цього чотирикутника можна описати коло.

258. Знайдіть периметр:

- описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 7 см, 9 см і 8 см;
- описаної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють 3 см і 11 см.



259. Рівнобічна трапеція описана навколо кола. Знайдіть:

- бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 7 см;
- середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 16 см.

260. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

Рівень Б

261. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, центр якого лежить на стороні AD . Знайдіть кути чотирикутника, якщо $\angle ACB = 20^\circ$, $\angle DBC = 10^\circ$.

 **262.** Знайдіть кути трапеції, якщо центр кола, описаного навколо неї, лежить на більшій основі, а кут між діагоналями дорівнює 70° .

263. У трикутнику ABC висоти AA_1 і CC_1 перетинаються в точці D . Доведіть, що точки A_1, B, C_1, D лежать на одному колі.

 **264.** Якщо бісектриси кутів чотирикутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник, то навколо утвореного чотирикутника можна описати коло. Доведіть.

265 (опорна).

a) Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей, а радіус кола дорівнює половині висоти ромба. Доведіть.

b) Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює половині її висоти. Доведіть.

266. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по різні боки від прямої AC). Доведіть, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

 **267.** Сторони чотирикутника дорівнюють 4 м, 9 м, 8 м і 5 м. Назвіть пари протилежних сторін цього чотирикутника, якщо в нього можна вписати коло.

268. Діагональ ромба, що виходить із вершини кута 60° , дорівнює 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

 **269.** Знайдіть середню лінію прямокутної трапеції, в якій більша бічна сторона дорівнює 10 см, а радіус вписаного кола дорівнює 3 см.

270. Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, ділить даний трикутник на трапецію і трикутник із периметром 24 см. Основа даного трикутника дорівнює 12 см. Доведіть, що в отриману трапецію можна вписати коло.

 **271.** Із точки A , що лежить поза колом з центром O , проведено дотичні AB і AC до цього кола (B і C — точки дотику). Доведіть, що в чотирикутник $AOBC$ можна вписати коло.

Рівень В

272 (опорна). Якщо трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана навколо кола з центром O , то:

a) точка O — точка перетину бісектрис кутів трапеції;
б) трикутники AOB і COD прямокутні.

Доведіть.

 **273.** Якщо сторону чотирикутника, що сполучає дві його вершини, видно з двох інших вершин під рівними кутами, то навколо цього чотирикутника можна описати коло. Доведіть.

274. З вершини тупого кута ромба $ABCD$ проведено висоти BM і BN , причому відрізок MN вдвічі менший за діагональ BD . Знайдіть кути ромба.

 **275.** На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC поза трикутником побудовано квадрат $ABDE$, діагоналі якого перетинаються в точці K . Знайдіть кут ACK .

 **276.** Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:
зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому куту, не суміжному з ним.

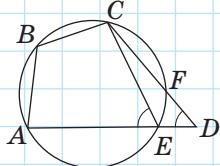


Рис. 84

«Доведення»

Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (рис. 84). Через точки A , B і C проведемо коло, яке перетне сторони AD і CD в деяких точках E і F . Сполучивши точки E і C , отримуємо чотирикутник $ABCE$, вписаний у дане коло. За властивістю вписаного чотирикутника $\angle B + \angle E = 180^\circ$. Але за умовою $\angle B + \angle D = 180^\circ$, отже, $\angle D = \angle E$. Це означає, що кут CEA , який є зовнішнім кутом трикутника CDE , дорівнює внутрішньому куту CDE цього трикутника, тобто зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому куту, не суміжному з ним.

 **277.** Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:
у колі хорда, яка не проходить через центр, дорівнює діаметру.

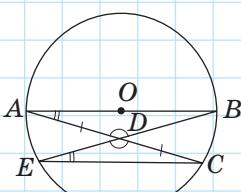


Рис. 85

«Доведення»

Нехай AB — діаметр кола з центром O (рис. 85). Проведемо через точку A довільну хорду AC і позначимо її середину — точку D . Проведемо через точки B і D хорду BE і сполучимо точки E і C .

У трикутниках ADB і CDE кути при вершині D рівні як вертикальні, $\angle BAD = \angle CED$ як вписані кути, що

спираються на одну й ту саму дугу BC , а $AD = CD$ за побудовою. Отже, ці трикутники рівні за стороною і двома кутами, звідки $AB = EC$, тобто діаметр кола дорівнює хорді, яка не проходить через центр кола.

278. Побудуйте ромб за діагоналлю і радіусом вписаного кола.

 **279.** Побудуйте рівнобічну трапецію за бічною стороною і радіусом вписаного кола.



Повторення перед вивченням § 9

Теоретичний матеріал

- медіана, бісектриса і висота трикутника;
- описане і вписане кола трикутника.



7 клас, § 12, 23

Задачі

280. Один із кутів трикутника дорівнює 60° . Під яким кутом перетинаються бісектриси двох інших його кутів?

281. Один із кутів трикутника дорівнює 60° . Під яким кутом перетинаються висоти, проведені до сторін цього кута?

§ 9*

Визначні точки трикутника

9.1. Точка перетину медіан

У сьомому класі під час вивчення вписаного й описаного кіл трикутника розглядалися дві його визначні точки — точка перетину бісектрис (інакше її називають **інцентром** трикутника) і точка перетину серединних перпендикулярів до сторін.

Розглянемо ще дві визначні точки трикутника.

Теорема (про точку перетину медіан трикутника)

Медіани трикутника перетинаються в одній точці й діляться нею у відношенні 2 : 1 починаючи від вершини трикутника.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC проведено медіани AD , BF і CE (рис. 86). Доведемо, що вони перетинаються в деякій точці O , причому $AO:OD = BO:OF = CO:OE = 2:1$.

Нехай O — точка перетину медіан AD і CE , точки K і M — середини відрізків AO і CO відповідно. Відрізок ED — середня лінія трикутника ABC , і за властивістю середньої лінії трикутника $ED \parallel AC$,

$ED = \frac{1}{2}AC$. Крім того, KM — середня лінія трикутника AOC , і за тією самою властивістю $KM \parallel AC$,

$KM = \frac{1}{2}AC$. Отже, в чотирикутнику $KEDM$ дві сторони паралельні й рівні. Таким чином, $KEDM$ — паралелограм, і його діагоналі KD і EM точкою перетину діляться навпіл. Отже, $AK = KO = OD$, $CM = MO = OE$, тобто точка O ділить медіани AD і CE у відношенні 2 : 1.

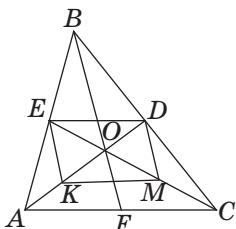


Рис. 86. Медіани трикутника перетинаються в одній точці

Аналогічно доводимо, що і третя медіана BF точкою перетину з кожною з медіан AD і CE ділитьться у відношенні $2 : 1$. А оскільки така точка поділу для кожної з медіан єдина, то всі три медіани перетинаються в одній точці. ■

Точку перетину медіан трикутника інакше називають **центроїдом**, або **центром мас** трикутника. У доречності такої назви можна переконатися, провівши експеримент: виріжте з картону довільний трикутник, проведіть у ньому медіани і спробуйте втримати трикутник у рівновазі, поклавши його на голку або гострий олівець у точці перетину медіан (рис. 87).

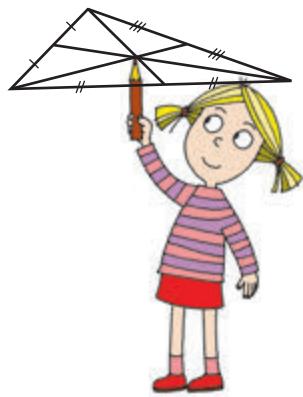


Рис. 87. Точка перетину медіан — центр мас трикутника

O

Задача

Якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC медіани AD і CE рівні і перетинаються в точці O (рис. 88).

Розглянемо трикутники AOE і COD . Оскільки точка O ділить кожну з рівних медіан AD і CE у відношенні $2 : 1$, то $AO = CO$, $EO = DO$. Крім того, $\angle AOE = \angle COD$ як вертикальні. Отже, $\triangle AOE \cong \triangle COD$ за першою ознакою. Звідси випливає, що $AE = CD$.

Але за означенням медіані ці відрізки — половини сторін AB і CB . Отже, $AB = CB$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

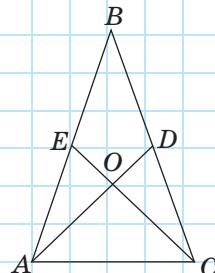


Рис. 88

9.2. Точка перетину висот

Теорема (про точку перетину висот трикутника)

Висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці.

Доведення

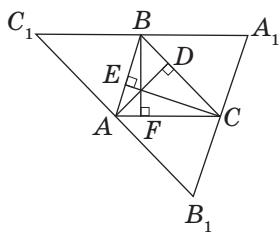


Рис. 89. Висоти трикутника ABC перетинаються в одній точці

□ Нехай AD , BF і CE — висоти трикутника ABC (рис. 89). Провівши через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам, одержимо трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого перпендикулярні до висот трикутника ABC . За побудовою чотирикутники C_1BCA і B_1ABC — паралелограми, звідки $C_1A = BC$ і $BC = AB_1$. Отже, точка A — середина відрізка B_1C_1 . Аналогічно доводимо, що B — середина A_1C_1 і C — середина A_1B_1 .

Таким чином, висоти AD , BF і CE лежать на серединних перпендикулярах до сторін трикутника $A_1B_1C_1$, які перетинаються в одній точці за наслідком з теореми про коло, описане навколо трикутника. ■

Точку перетину висот (або їх продовжень) інакше називають **ортокентром** трикутника.

Таким чином, визначними точками трикутника є:

- *точка перетину бісектрис — центр кола, вписаного в трикутник;*
- *точка перетину серединних перпендикулярів до сторін — центр кола, описаного навколо трикутника;*
- *точка перетину медіан — ділити кожну з медіан у відношенні $2 : 1$ починаючи від вершини трикутника;*
- *точка перетину висот (або їх продовжень).*



Запитання і задачі



Усні вправи



- 282.** Які з визначних точок трикутника можуть лежати поза трикутником?
- 283.** Чи може ортоцентр трикутника збігатися з його вершиною?
- 284.** Як розміщені визначні точки в рівносторонньому трикутнику?



Графічні вправи



- 285.** Накресліть трикутник ABC , проведіть його медіани AD і CE . Позначте точку O — точку їх перетину.
- Виміряйте довжини відрізків AO , OD і CO . Користуючись теоремою про точку перетину медіан трикутника, обчисліть наближено довжину відрізка OE . Перевірте отриманий результат вимірюванням.
 - Проведіть промінь BO і позначте точку F , у якій він перетинає сторону AC . У якому відношенні ця точка ділить сторону AC ?
- 286.** Накресліть трикутник ABC , проведіть його висоти AD і CE . Позначте точку O — точку перетину цих висот (або їх продовжень). Проведіть промінь BO . Під яким кутом він перетинає пряму AC ? Чому?



Письмові вправи

Рівень А



- 287.** Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику всі чотири визначні точки лежать на одній прямій. Яка це пряма?
- 288.** У трикутнику точка перетину медіан збігається з ортоцентром. Доведіть, що цей трикутник — рівносторонній.
- 289.** Точка перетину медіан трикутника ділить одну з медіан на відрізки, різниця яких становить 3 см. Знайдіть довжину цієї медіани.

Рівень Б



- 290.** Точка H — ортоцентр трикутника ABC . Доведіть, що точка A — ортоцентр трикутника HBC .

- 291.** Точки D, E, F — середини сторін трикутника ABC . Доведіть, що точка перетину медіан трикутника DEF збігається з точкою перетину медіан трикутника ABC .
-  **292.** Дано паралелограм $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і CDA лежать на діагоналі BD і ділять її на три рівні частини.

Рівень В

- 293.** Відстань від центра кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, до його основи дорівнює 3 см, а радіус цього кола дорівнює 6 см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка перетину медіан ділить медіану, проведену до основи.
- 294.** Побудуйте трикутник за трьома медіанами.
-  **295.** Центр кола, описаного навколо трикутника, є ортоцентром трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника. Доведіть.



Повторення перед вивченням § 10

Теоретичний матеріал

- пропорції;
- рівність трикутників;
- теорема Фалеса.

 6 клас

 7 клас, § 7

 8 клас, § 6

Задачі

- 296.** У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^\circ$) через середину катета AB проведено пряму, паралельну медіані BM . Знайдіть довжини відрізків, на які ця пряма ділить гіпотенузу, якщо $BM = 6$ см.
- 297.** Знайдіть x з пропорції:
- $5,4 : x = 2,7 : 7,2$;
 - $$\frac{x+1}{144} = \frac{25}{60}$$
.



Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 2

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 2

1. У рівнобічній трапеції протилежні кути відносяться як $2 : 7$. Знайдіть кути трапеції.
2. За рис. 90 знайдіть AB_1 , якщо $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $AC_1 = C_1C_2$, $AB_2 = 12$ см.
3. Середня лінія відтинає від даного трикутника трикутник, периметр якого дорівнює 17 см. Знайдіть периметри даного трикутника і трикутника, утвореного його середніми лініями.
4. У рівнобічній трапеції з кутом 45° відрізки, що сполучають середину більшої основи з вершинами тупих кутів, перпендикулярні до бічних сторін. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її менша основа дорівнює 4 см.
5. За даними рис. 91 знайдіть кут x .
6. У рівнобічну трапецію вписано коло, яке ділить бічу сторону на відрізки у відношенні $9 : 16$. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо середня лінія трапеції дорівнює 50 см.

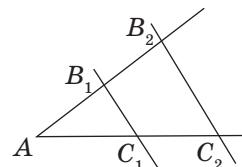


Рис. 90

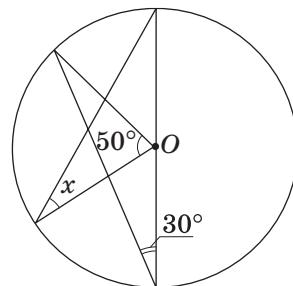
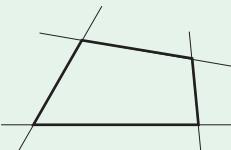
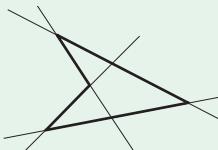
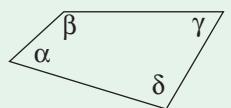
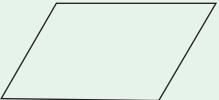
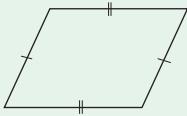
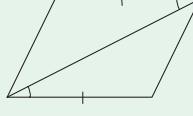


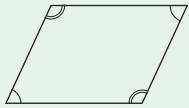
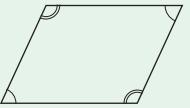
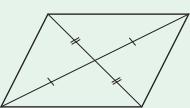
Рис. 91

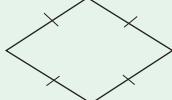
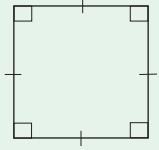
Підсумки

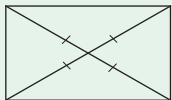
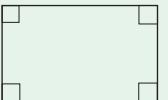
ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ І

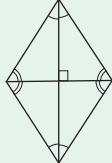
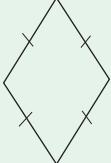
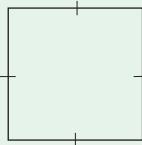
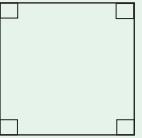
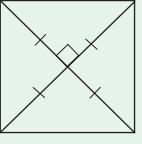
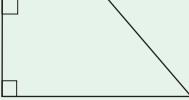
ЧОТИРИКУТНИК	
Опуклий чотирикутник 	Неопуклий чотирикутник 
Теорема про суму кутів чотирикутника 	Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

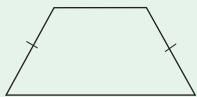
ПАРАЛЕЛОГРАМ	
	Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні
Властивості паралелограма 	Ознаки паралелограма 
Протилежні сторони паралелограма рівні	Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм

Властивості паралелограма	Ознаки паралелограма
	Протилежні кути паралелограма рівні 
Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться на дві рівні частини	Якщо протилежні кути чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм 

ВІДИ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ	
	Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі
	Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні
	Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні

Властивість прямокутника	Ознака прямокутника
	Діагоналі прямокутника рівні 

Властивості ромба	Ознака ромба
 <p>Діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл</p>	 <p>Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є ромбом</p>
Властивості квадрата	
	<p>Усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні</p>
	<p>Усі кути квадрата прямі</p>
	<p>Діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, ділять кути квадрата навпіл і точкою перетину діляться навпіл</p>
ТРАПЕЦІЯ	
	<p>Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні</p>
	<p>Прямокутною трапецією називається трапеція, у якій одна з бічних сторін перпендикулярна до основ</p>



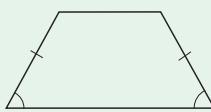
Рівнобічною (рівнобедrenoю) трапецією називається трапеція, у якій бічні сторони рівні

Властивість рівнобічної трапеції

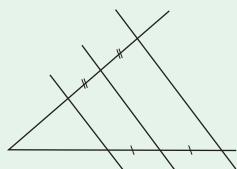
У рівнобічній трапеції кути при основі рівні

Ознака рівнобічної трапеції

Якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція рівнобічна



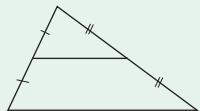
Теорема Фалеса



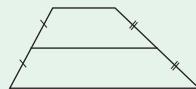
Паралельні прямі, які перетинають сторони кута і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій стороні

СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін



Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції



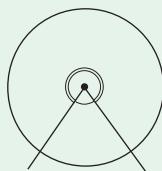
Властивість середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони

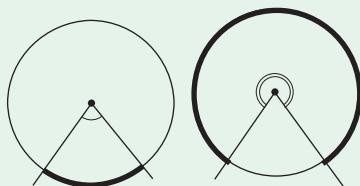
Властивість середньої лінії трапеції

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі

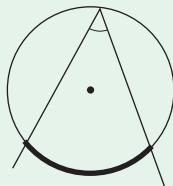
КУТИ В КОЛІ



Центральним кутом у колі називається плоский кут із вершиною в центрі кола



Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута



Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.

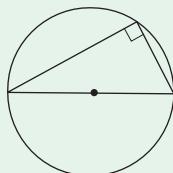
Теорема про вписаний кут

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається

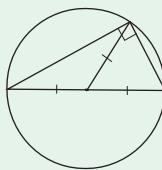
Наслідки з теореми про вписаний кут



Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні

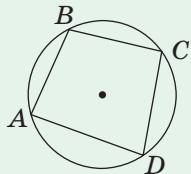


Вписаний кут, що спирається на півколо, прямий, і навпаки: будь-який прямий вписаний кут спирається на півколо



Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи

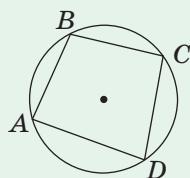
ВПИСАНИ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі

Властивість вписаного чотирикутника

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°

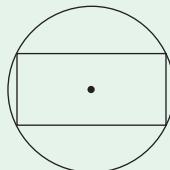


$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= \\ &= \angle B + \angle D = \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

Ознака вписаного чотирикутника

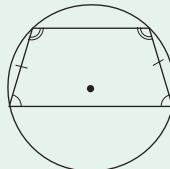
Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло

Якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником



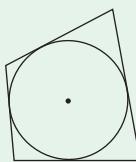
Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло

Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна



Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло

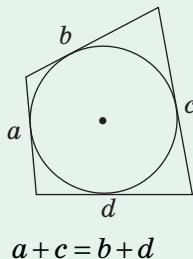
ОПИСАНИ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола

Властивість описаного чотирикутника

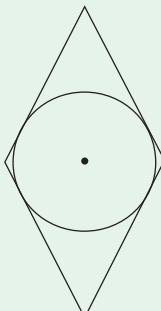
В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні



Ознака описаного чотирикутника

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло

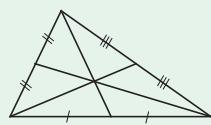
Якщо в паралелограмм вписано коло, то він є ромбом



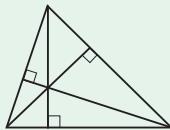
У будь-який ромб можна вписати коло

ВИЗНАЧНІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА

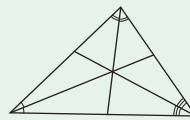
Точка перетину медіан (центр мас)



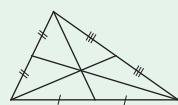
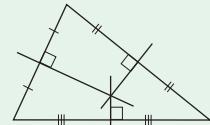
Точка перетину висот або їх продовжень (ортогоцентр)



Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола

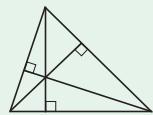


Точка перетину серединних перпендикулярів — центр описаного кола



Теорема про точку перетину медіан трикутника

Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника



Теорема про точку перетину висот трикутника

Висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці



Контрольні запитання до розділу I

1. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$. Назвіть його сторони і діагоналі. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого чотирикутника.
2. Дайте означення паралелограма. Сформулюйте і доведіть властивості паралелограма.
3. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
4. Дайте означення прямокутника. Сформулюйте і доведіть властивість прямокутника.
5. Дайте означення ромба. Сформулюйте і доведіть властивості ромба.
6. Дайте означення квадрата. Назвіть властивості квадрата.
7. Дайте означення трапеції. Назвіть окремі види трапецій, які вам відомі. Які властивості вони мають?
8. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
9. Дайте означення середньої лінії трикутника. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трикутника.
10. Дайте означення середньої лінії трапеції. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трапеції.
11. Дайте означення центрального кута в колі. Як пов'язана градусна міра дуги кола з градусною мірою відповідного центрального кута?
12. Дайте означення вписаного кута. Сформулюйте і доведіть теорему про вписаний кут.
13. Сформулюйте наслідки з теореми про вписаний кут.
14. Дайте означення чотирикутника, вписаного в коло. Сформулюйте властивість і ознаку вписаного чотирикутника.
15. Дайте означення чотирикутника, описаного навколо кола. Сформулюйте властивість і ознаку описаного чотирикутника.



Додаткові задачі до розділу I

- 298.** Якщо в опуклому чотирикутнику не всі кути рівні, то хоча б один із них гострий. Доведіть.
- 299.** Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них дорівнює сумі двох інших. Чи може такий паралелограм бути ромбом; квадратом?

300. Діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 7 см. Пряма, яка проходить через точку A перпендикулярно до діагоналі AC , перетинає прямі BC і CD в точках E і F . Знайдіть EF .

301. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його середні лінії перпендикулярні й рівні.

302. Дитячий майданчик має форму чотирикутника. Доведіть, що прямолінійні доріжки, що сполучають середини протилежних сторін майданчика, при перетині діляться навпіл.

303. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а тупий кут трапеції втричі більший за гострий. Знайдіть висоту трапеції.

304. Пряма, що проходить через вершину тупого кута трапеції, ділить її на ромб і рівносторонній трикутник. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 60 см.

305. У трикутнику ABC висота BH ділить сторону AC на відрізки $AH = 2$ см, $HC = 6$ см. Відрізок AM — медіана трикутника ABC , відрізок MD — висота трикутника AMC . Знайдіть відрізки AD і DC .

306. Дано трапецію, яка є вписаною в коло й описаною навколо кола. Знайдіть:

- кути трапеції, якщо сума трьох із них дорівнює 300° ;
- сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 16 см.

307. За рис. 92 доведіть:

- властивість середньої лінії трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$);
- якщо в чотирикутнику $ABCD$ відрізок, що сполучає середини сторін AB і CD , дорівнює півсумі сторін AD і BC , то $ABCD$ — трапеція або паралелограм.

308. Якщо діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює півсумі основ. Доведіть.

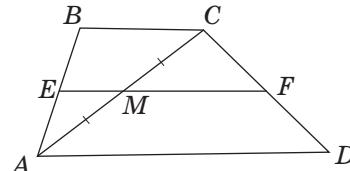
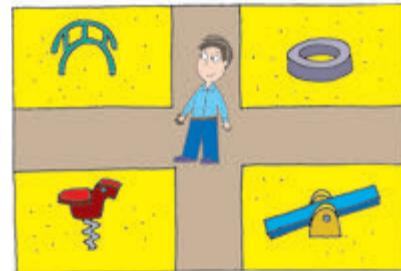


Рис. 92

Задачі підвищеної складності

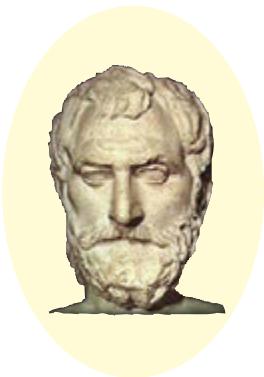
-  **309.** Пряма проходить через вершину B паралелограма $ABCD$. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і c відповідно. Знайдіть відстань від точки D до даної прямої. Розгляньте два випадки.
-  **310.** Точки M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що точка перетину прямих BN і DM лежить на діагоналі AC .
- 311.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні до протилежних сторін CD і BC відповідно. Доведіть, що точка перетину цих прямих належить прямій AC .
-  **312.** Доведіть, що бісектриси кутів при бічній стороні трапеції перетинаються на її середній лінії.
- 313.** Через точку площини проведено три прямі так, що кут між будь-якими двома з них дорівнює 60° . Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених із будь-якої точки площини до цих прямих, є вершинами рівностороннього трикутника.
- 314.** Відрізки AB і AC — відрізки дотичних до кола, проведених з точки A . Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABC , лежить на даному колі.
- 315.** Знайдіть кути рівнобічної трапеції, у якій бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.
- 316.** Дано гострокутний трикутник ABC і точку M таку, що $BM \perp AB$, $CM \perp AC$. Доведіть, що точка M лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC .
-  **317.** Якщо сума кутів при основі трапеції дорівнює 90° , то відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.
- Доведіть дане твердження.
 - Сформулюйте і доведіть обернене твердження.



Відеоматеріали за розділом 1

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Переважна більшість теоретичних положень, пов'язаних із чотирикутником, була відома ще в Давній Греції. Наприклад, у роботах Евкліда згадується паралелограм під назвою «паралельнолінійна площа». Більшість властивостей чотирикутників були встановлені на практиці й тільки згодом доведені теоретично.



Фалес Мілетський

Одним із творців ідеї геометричного доведення визнано давньогрецького вченого **Фалеса Мілетського** (бл. 625–547 рр. до н. е.). Його вважали першим серед славетних «семи мудреців» Еллади. Механік і астроном, філософ і громадський діяч, Фалес значно збагатив тогочасну науку. Саме він познайомив греків із досягненнями єгиптян у геометрії та астрономії. За свідченням історика Геродота, Фалес передбачив затемнення Сонця, що сталося 28 травня 585 р. до н. е. Він дав перші уявлення про електрику і магнетизм. Досягнення Фалеса в геометрії не вичерпуються теоремою, що має його ім'я.

Стверджують, що Фалес відкрив теорему про вертикальні кути, довів рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, обґрунтував, що кут, який спирається на півколо, прямий, і першим описав коло навколо прямокутного трикутника.



У молоді роки Фалес побував у Єгипті. За легендою, він здивував єгипетських жерців, вимірювши висоту піраміди Хеопса за допомогою подібності трикутників (про неї — у наступному розділі).

Фалесові приписують і доведення другої ознаки рівності трикутників, на основі якої він створив далекомір для визначення відстані до кораблів на морі.

Вивчаючи визначні точки трикутника, неможливо не згадати імена ще кількох учених.

Теорему про перетин висот трикутника довів у XV столітті німецький математик **Регіомонтан** (1436–1476) — на його честь цю теорему іноді називають задачею Регіомонтана.

Видатний учений **Леонард Ейлер** (1707–1783), який установив зв'язок між визначними точками трикутника, був унікальною історичною постаттю свого часу. Геометрія і механіка, оптика і балістика, астрономія і теорія музики, математична фізика і суднобудування — ось далеко не повний перелік галузей, які він збагатив своїми відкриттями. Перу Ейлера належать понад 800 наукових праць, причому, за статистичними підрахунками, він робив у середньому один винахід за тиждень! Людина надзвичайної широти інтересів, Ейлер був академіком Берлінської і Санкт-Петербурзької академій наук і істотно впливув на розвиток світової науки. Недарма французький математик П. Лаплас, розмірковуючи про вчених свого покоління, стверджував, що Ейлер — «учитель усіх нас».



Леонард Ейлер

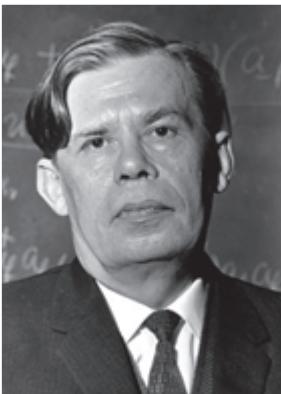
Серед українських математиків вагомий внесок у дослідження властивостей чотирикутників зробив **Михайло Васильович Остроградський** (1801–1862). Цей видатний учений, професор Харківського університету, здобув світове визнання завдяки роботам з математичної фізики, математичного аналізу, аналітичної механіки. Талановитий педагог і методист, Остроградський створив «Підручник з елементарної геометрії», який, зокрема, містив низку цікавих і складних задач на побудову вписаних і описаних чотирикутників і обчислення їхніх площ.



М. В. Остроградський



Видатні математики України



Боголюбов Микола Миколайович (1909–1992)

Чи можна стати видатним ученим, отримавши освіту в сільській школі? Можливо, хтось із вас замислювався над цим питанням. Звісно, що не всі можуть стати всесвітньовідомими науковцями. Тому ми маємо пишатися тими, кому це вдалося, як, наприклад, М. М. Боголюбову.

Отримавши початкову освіту вдома, Микола Боголюбов з 1919 по 1921 р. навчався у Велико-

кручинській семирічній школі на Полтавщині — єдиному навчальному закладі, який він закінчив. Після закінчення школи Микола самостійно вивчав фізику і математику. У 1921 р. родина Боголюбових переїхала до Києва, і з 14 років Микола вже брав участь у семінарі кафедри математичної фізики Київського університету. У 15-річному віці Боголюбов написав першу наукову працю, а наступного року був прийнятий одразу до аспірантури Академії наук України. Після її закінчення він отримав ступінь доктора математичних наук (у 20 років!). З 1936 р. Микола Миколайович — професор Київського університету, у 1940 р. був направлений до Чернівців для організації кафедр на фізико-математичному факультеті Чернівецького держуніверситету. У 1948 р. Боголюбова обирають академіком Академії наук України.

Не розділяючи у своїх наукових інтересах математику, механіку та фізику, Микола Миколайович сприяв їх спільному розвитку. У 1966 р. М. М. Боголюбов став першим директором створеного ним Інституту теоретичної фізики Академії наук України у Києві. Боголюбов був членом багатьох іноземних академій наук — Болгарії, Німеччини, Польщі, США та ін. Науковець отримав численні міжнародні нагороди, як-от: Хейнemanівська премія (1966 р.), медаль Макса Планка (1973 р.), медаль Поля Дірака (1992 р.).

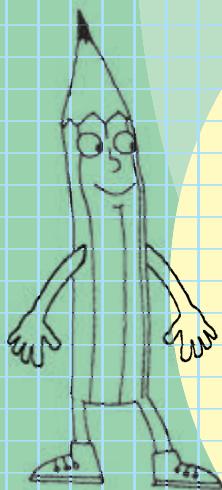
Меморіальні дошки на честь М. М. Боголюбова встановлено на будівлях університетів у Києві та Чернівцях, пам'ятник видатному вченому відкрито у селі Велика Круча. У 1992 р. Національна академія наук України заснувала Премію імені М. М. Боголюбова, на честь ученого названо малу планету «22616 Боголюбов».

Розділ II

Подібність трикутників.

Теорема Піфагора

- § 10. Подібні трикутники
- § 11. Ознаки подібності трикутників
- § 12. Подібність прямокутних трикутників
- § 13. Теорема Піфагора та наслідки з неї
- § 14. Застосування подібності трикутників



Геометрія має два скарби: один із них — це теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні... Перший можна порівняти з мірою золота, а другий більше нагадує коштовний камінь.

Йоганн Кеплер

У цьому розділі ви розпочнете знайомство з подібністю фігур. Відношення подібності є однією з найважливіших характеристик евклідової геометрії. Вияви подібності часто зустрічаються і в повсякденному житті. Наприклад, авіамоделі літаків подібні до реальних машин, а репродукції класичних картин подібні до оригіналів.

В основі теорії подібності лежить узагальнена теорема Фалеса. Завдяки властивостям подібних трикутників встановлюється чимало важливих геометричних співвідношень. Зокрема, за допомогою подібності буде доведено славетну теорему Піфагора. Щоправда, таке доведення не є класичним, адже за часів Піфагора деякі геометричні факти, які ми будемо розглядати, ще не були відкриті. Але сьогодні навіть звичайний школяр може оволодіти знаннями, невідомими великому Піфагорові.



§ 10

Подібні трикутники

10.1. Узагальнена теорема Фалеса

Пригадаємо деякі поняття, пов'язані з діленням і пропорціями, які знадобляться для подальших міркувань.

Відношенням відрізків завдовжки a і b називається частка їх довжин, тобто число $\frac{a}{b}$.

Інакше кажучи, відношення $\frac{a}{b}$ вказує, скільки разів відрізок b і його частини укладаються у відрізку a . Дійсно, якщо відрізок b взяти за одиницю вимірювання, то це відношення дорівнюватиме довжині відрізка a .

Відрізки завдовжки a і c **пропорційні** відрізкам завдовжки b і d , якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Наприклад, відрізки завдовжки 8 см і 12 см пропорційні відрізкам завдовжки 10 см і 15 см, оскільки $\frac{8}{10} = \frac{12}{15} = 0,8$.

Сформулюємо узагальнену теорему Фалеса для нерівних відрізків, які відтинаються паралельними прямыми на сторонах кута.

Теорема (про пропорційні відрізки)

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A B_1}{B_1 C_1}, \text{ або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Твердження теореми ілюструє рис. 93. Наведемо міркування, на яких ґрунтуються доведення цієї теореми. Відношення $\frac{AB}{BC}$ вказує, скільки разів

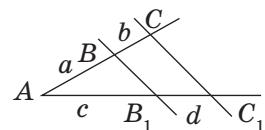


Рис. 93. Паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки

відрізок BC укладається у відрізку AB , а відношення $\frac{AB_1}{B_1C_1}$ — скільки разів відрізок B_1C_1 укладається у відрізку AB_1 . Теорема Фалеса встановлює відповідність між процесами вимірювання відрізків AB і AB_1 . Справді, прямі, паралельні BB_1 , «переводять» рівні відрізки на одній стороні кута в рівні відрізки на іншій стороні: відрізок AB «переходить» у відрізок AB_1 , десята частина відрізка AB — у десяту частину відрізка AB_1 і т. д. Тому, якщо відрізок BC укладається у відрізку AB n разів, то відрізок B_1C_1 укладається у відрізку AB_1 також n разів.

Повне доведення цієї теореми подано в Додатку 1.

Зauważення. Оскільки $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, тобто $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, і висновок даної теореми можна записати у вигляді $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}$. На таку рівність ми також будемо посилатися як на теорему про пропорційні відрізки.

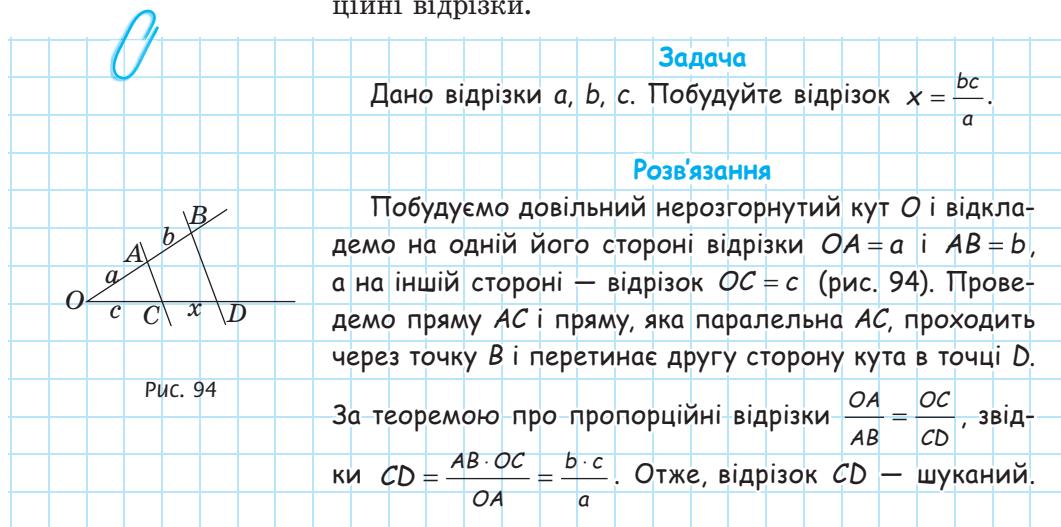


Рис. 94

Задача

Дано відрізки a , b , c . Побудуйте відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

Розв'язання

Побудуємо довільний нерозгорнутий кут O і відкладемо на одній його стороні відрізки $OA = a$ і $AB = b$, а на іншій стороні — відрізок $OC = c$ (рис. 94). Проведемо пряму AC і пряму, яка паралельна AC , проходить через точку B і перетинає другу сторону кута в точці D .

За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$, звідки $CD = \frac{AB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}$. Отже, відрізок CD — шуканий.

Зазначимо, що в задачі величина x є четвертим членом пропорції $a:b=c:x$. Тому побудований відрізок називають **четвертим пропорційним відрізком**.

10.2. Означення подібних трикутників

Рівні фігури можна уявити як фігури, що мають однакову форму й однакові розміри. Але в повсякденному житті часто зустрічаються речі, які мають однакову форму, але різні розміри: наприклад, чайне блюдце і тарілка, однакові моделі взуття різних розмірів тощо (наведіть інші приклади самі). У геометрії фігури однакової форми прийнято називати **подібними**. Наприклад, подібними один до одного є будь-які два квадрати, будь-які два кола. Введемо спочатку поняття подібних трикутників.

Означення

Два трикутники називаються **подібними**, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні.

На рис. 95 зображені подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Подібність цих трикутників коротко позначають так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. У цьому записі, як і в записі рівності трикутників, назви трикутників будемо впорядковувати так, щоб вершини рівних кутів зазначались у порядку відповідності. Це означає:

якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, **то** $\angle A = \angle A_1$,
 $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

Число k , що дорівнює відношенню відповідних сторін подібних трикутників, називають **коефіцієнтом подібності**.

Очевидно, що два рівні трикутники є подібними з коефіцієнтом подібності 1.

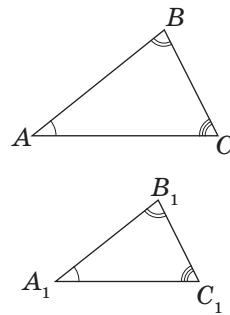
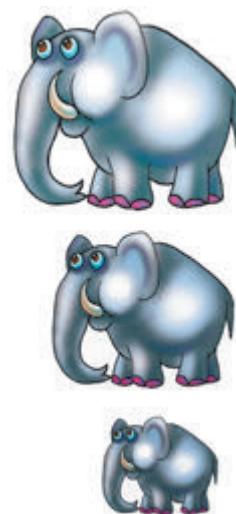


Рис. 95. Подібні трикутники



Опорна задача

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності. Доведіть.

Розв'язання

Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності k .

Це означає, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, тобто $AB = kA_1B_1$,

$BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$. Маємо:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kP_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}} = k.$$

Зазначимо також, що *відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності*. Доведіть це самостійно.

Запитання і задачі



Усні вправи

- 318.** Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle KMN$. Назвіть відповідно рівні кути цих трикутників.
- 319.** Трикутник ABC і трикутник з вершинами D, E, F подібні, причому $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{ED}$. Закінчіть запис $\triangle ABC \sim \triangle \dots$.
- 320.** Чи рівні будь-які два подібні трикутники? Чи подібні будь-які два рівні трикутники? Назвіть відповідний коефіцієнт подібності.
- 321.** Чи можуть бути подібними прямокутний і тупокутний трикутники?
- 322.** Два трикутники подібні з коефіцієнтом 0,25. У скільки разів сторони одного трикутника більші за відповідні сторони іншого?



Графічні вправи

323. Накресліть трикутник ABC . Позначте на стороні AB точку D так, щоб $AD:DB=2:1$. Проведіть через точку D пряму, паралельну стороні AC , і позначте точку E — точку перетину цієї прямої зі стороною BC . Виміряйте відрізок BE та обчисліть довжину відрізка EC за теоремою про пропорційні відрізки. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

324. Накресліть трикутник ABC і проведіть у ньому середню лінію DE , паралельну AC . Назвіть подібні трикутники, які утворилися на рисунку.



Письмові вправи

Рівень А

325. Визначте, чи є відрізки завдовжки a і b пропорційними відрізкам c і d , якщо:

- $a = 8 \text{ см}, b = 24 \text{ см}, c = 4 \text{ см}, d = 12 \text{ см};$
- $a = 9 \text{ см}, b = 14 \text{ см}, c = 7 \text{ см}, d = 18 \text{ см}.$

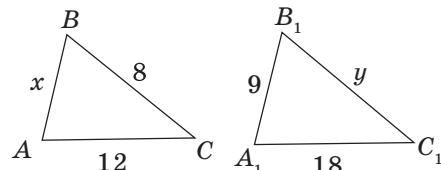


Рис. 96

326. На рис. 96 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. За даними рисунка знайдіть x і y .

327. На рис. 97 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. За даними рисунка знайдіть x і y .

328. Пряма KM паралельна стороні AC трикутника ABC (рис. 98). Знайдіть відрізок MC , якщо:

- $AK = 2 \text{ см}, KB = 6 \text{ см}, BM = 9 \text{ см};$
- $AK : KB = 2 : 3, BC = 10 \text{ см}.$

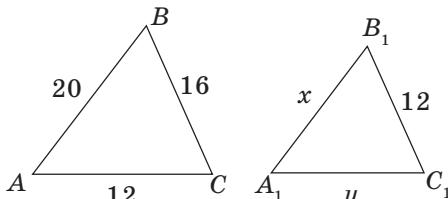


Рис. 97

329. Пряма KM паралельна стороні AC трикутника ABC (рис. 98). Знайдіть відрізок AB , якщо $AK = 6 \text{ см}, BM : MC = 4 : 3$.

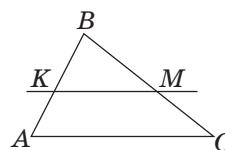


Рис. 98

330. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Знайдіть:

- кут C , якщо $\angle A = 45^\circ$, $\angle E = 110^\circ$;
- кут F , якщо $\angle B = 80^\circ$, $\angle A = \angle C$.

331. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо в подібному йому трикутнику різниця найбільшого і найменшого кутів дорівнює 70° .

332. Сторони трикутника дорівнюють 2,5 см, 4 см і 5 см. Знайдіть сторони трикутника, подібного даному, якщо:

- його периметр дорівнює 46 см;
- його найменша сторона дорівнює найбільшій стороні даного трикутника.

333. Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 12 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо його найбільша сторона дорівнює 8 см.

334. Доведіть за означенням, що будь-які два рівносторонні трикутники подібні.

335. Доведіть від супротивного, що тупокутний і рівносторонній трикутники не можуть бути подібними.

Рівень Б

336. Пряма MN паралельна основам трапеції $ABCD$ (рис. 99). Знайдіть:

- сторону CD , якщо $AM : AB = 4 : 5$, $CN = 3$ см;
- сторону AB , якщо $AM : ND = 3 : 2$, $CN = 2$ см, $AM = 9$ см.

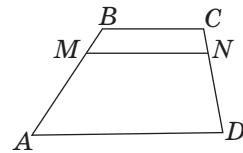
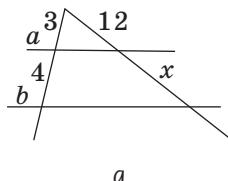


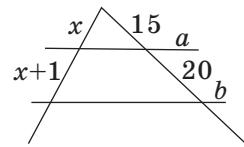
Рис. 99

337. Пряма MN паралельна основам трапеції $ABCD$ (рис. 99). Знайдіть сторону AB , якщо $AM - MB = 1$ см, $CN : CD = 3 : 7$.

338. За даними рис. 100 знайдіть x , якщо $a \parallel b$.



a



b

Рис. 100

339. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, причому $\angle D = 70^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Доведіть, що $AB = AC$.

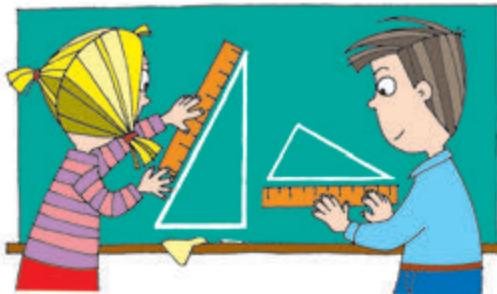
 **340.** Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, причому $\angle A + \angle M = 90^\circ$. Доведіть, що AB — найбільша сторона трикутника ABC .

341. Доведіть, що трикутник з вершинами в серединах сторін даного трикутника подібний даному. Чому дорівнює коефіцієнт подібності?

 **342.** У трикутнику ABC точки D і E — середини сторін AB і BC відповідно. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, і знайдіть коефіцієнт подібності.

Рівень В

343. Кожен із двох нерівних, але подібних трикутників має сторони завдовжки 12 см і 18 см. Знайдіть невідомі сторони цих трикутників.



 **344.** Трикутники зі сторонами a, b, c і b, c, d подібні. Доведіть, що коефіцієнт подібності не може дорівнювати 2.

 **345.** Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму: *відрізки паралельних прямих, що містяться між сторонами кута, рівні*.

«Доведення»

Нехай AB і CD — відрізки паралельних прямих, які перетинають сторони кута O (рис. 101). За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$, або $AO \cdot DO = BO \cdot CO$. Помножимо обидві частини цієї рівності на відмінну від нуля різницю $AB - CD$:

$$AO \cdot DO \cdot (AB - CD) = BO \cdot CO \cdot (AB - CD),$$

$$AO \cdot DO \cdot AB - AO \cdot DO \cdot CD = BO \cdot CO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot CD.$$

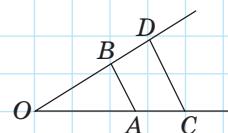


Рис. 101

Перенесемо перший член правої частини рівності ліворуч, а другий член лівої частини — праворуч:

$$AO \cdot DO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot AB = AO \cdot DO \cdot CD - BO \cdot CO \cdot CD, \text{ або} \\ (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot AB = (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot CD.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на вираз у дужках, маємо $AB = CD$, тобто відрізки паралельних прямих, що містяться між сторонами кута, рівні.

346. Діагональ AC ділить трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на два подібні трикутники ABC і ACD . Знайдіть AC , якщо $BC = 4$ см, $AD = 9$ см.

 **347.** Діагональ AC трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює стороні CD і ділить трапецію на два подібні трикутники ABC і ACD . Знайдіть периметр трапеції, якщо $AB = 9$ см, $CD = 12$ см.



Повторення перед вивченням § 11

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників;
- трапеція.

 7 клас, § 8, 10, 13

 8 клас, § 5

Задачі

348. Через вершину трикутника проведено пряму, яка ділить даний трикутник на два рівні трикутники. Визначте вид даного трикутника. Чи може така пряма розділити трикутник на два нерівні, але подібні трикутники? Висловіть припущення.

349. Діаметр AC перетинає хорду BD в точці K , яка ділить хорду навпіл. Доведіть рівність трикутників ABC і ADC . Чи можуть хорди AB і CD бути паралельними, якщо точка K не є центром кола?

§ 11

Ознаки подібності трикутників

11.1. Подібність трикутників за двома кутами

Для встановлення подібності двох трикутників, як і для встановлення їх рівності (пригадайте ознаки рівності трикутників), не обов'язково перевіряти всі співвідношення сторін і кутів згідно з означенням — достатньо перевірити лише деякі з них. Які саме? Відповідь на це запитання дають три ознаки подібності трикутників.

Теорема (ознака подібності трикутників за двома кутами)



Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 102). Доведемо подібність цих трикутників. Із теореми про суму кутів трикутника очевидно випливає, що $\angle C = \angle C_1$. Відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою, звідки $AC_2 = A_1C_1$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, отже, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Аналогічно доводимо, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Таким чином, за означенням подібних трикутників $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

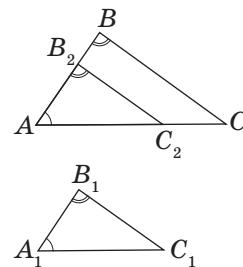


Рис. 102. До доведення подібності трикутників за двома кутами

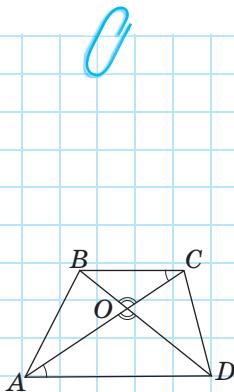


Рис. 103

Задача

Точка перетину діагоналей трапеції ділить одну з них на відрізки завдовжки 4 см і 7 см. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі перетинаються в точці O , $BC = 8$ см (рис. 103). Розглянемо трикутники AOD і COB . У них кути при вершині O рівні як вертикальні, $\angle CAD = \angle BCA$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC . Отже, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ за двома кутами.

Звідси випливає, що $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO}$. Оскільки за умовою

$BC < AD$, то $BO < OD$, отже, $BO = 4$ см, $OD = 7$ см.

$$\text{Тоді } AD = \frac{BC \cdot DO}{BO} = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14 \text{ (см)}.$$

Середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ,

$$\text{тобто } \frac{8 + 14}{2} = 11 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 11 см.

11.2. Подібність трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Теорема (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними)

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 104). Доведемо подібність цих трикутників. Відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ за двома кутами. Звідси $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а оскільки $AB_2 = A_1B_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $A_1C_1 = AC_2$. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, отже, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle AB_2C_2$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за двома кутами. Теорему доведено. ■

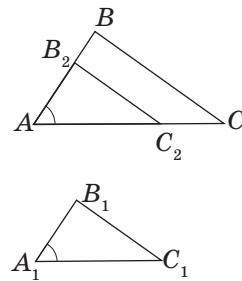


Рис. 104. До доведення подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Задача

Пряма, яка перетинає сторони BA і BC трикутника ABC , ділить кожну з них у відношенні $m:n$ починаючи від вершини B . Доведіть, що ця пряма паралельна стороні AC .

0

Розв'язання

Нехай пряма k перетинає сторони BA і BC трикутника ABC в точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 105). Оскільки за умовою задачі $\frac{BA_1}{AA_1} = \frac{BC_1}{CC_1} = \frac{m}{n}$, то $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{m}{m+n}$. Тоді трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні за двома сторонами і кутом між ними. Із подібності трикутників випливає, що $\angle BAC_1 = \angle BAC$. Але ці кути є відповідними при прямих k і AC та січній AB . Отже, $k \parallel AC$ за ознакою паралельності прямих.

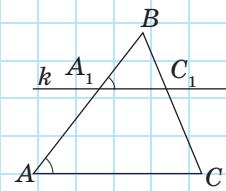


Рис. 105

11.3. Подібність трикутників за трьома сторонами

Теорема (ознака подібності трикутників за трьома сторонами)

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трем сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення

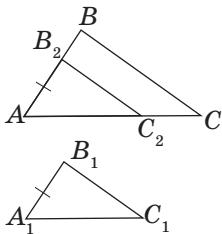


Рис. 106. До доведення подібності трикутників за трьома сторонами

□ Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 106). Доведемо подібність цих трикутників. Як і в попередніх теоремах, відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ за двома кутами. Звідси $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а оскільки $AB_2 = A_1B_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо $B_2C_2 = B_1C_1$. Analogічно доводимо, що $AC_2 = A_1C_1$. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, отже, $\angle A = \angle A_1$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle AB_2C_2$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за двома кутами. Теорему доведено. ■

Отже, для доведення всіх трьох ознак подібності трикутників використано один і той самий підхід, а доведенняожної з ознак подібності спирається на певну ознакою рівності трикутників.

У ході доведення ознак подібності трикутників ми показали також, що **пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші сторони, відтинає від даного трикутника подібний**.

Запитання і задачі



Усні вправи



350. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб можна було довести подібність цих трикутників? Назвіть усі можливі варіанти відповіді.

351. Дано трикутники ABC і KMN , в яких $\frac{AB}{KN} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK}$. Назвіть кут трикутника KMN , що дорівнює куту C . Чому ці кути рівні?

352. Дано трикутники ABC і KMN , в яких $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NK}$ і $\angle B = \angle N$. Назвіть кут трикутника ABC , що дорівнює куту M . Чому ці кути рівні?



353. Чи можуть бути подібними:

- прямокутний і рівнобедрений трикутники;
- прямокутний і рівносторонній трикутники;
- трикутник із кутом 50° і трикутник із кутом 100° ;
- трикутник із кутом 60° і трикутник із кутом 120° ?



354. Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо вони мають:

- по рівному гострому куту;
- по рівному тупому куту?



355. Два подібні трикутники мають спільний кут. Чи обов'язково їхні сторони, протилежні цьому куту, паралельні? Наведіть контрприклад.



Графічні вправи

356. Накресліть трапецію і проведіть її діагоналі.

а) Виділіть кольором подібні трикутники, які утворилися на рисунку. За якою ознакою можна довести їх подібність?

б) Виміряйте довжини відрізків однієї діагоналі, на які вона ділиться точкою перетину діагоналей. Виміряйте довжину однієї з основ трапеції та обчисліть довжину другої основи, користуючись подібністю трикутників. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

 **357.** Накресліть трикутник і проведіть пряму, яка паралельна одній з його сторін і перетинає дві інші сторони.

- Виділіть кольором подібні трикутники, які утворилися на рисунку. За якою ознакою можна довести їх подібність?
- Виміряйте кути, під якими дана пряма перетинає сторони трикутника, і знайдіть усі кути даного трикутника.



Письмові вправи

Рівень А

358. На рис. 107 знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.

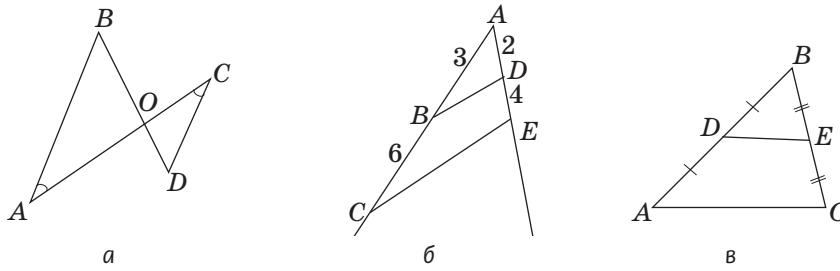


Рис. 107

 **359.** За даними рис. 108 доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

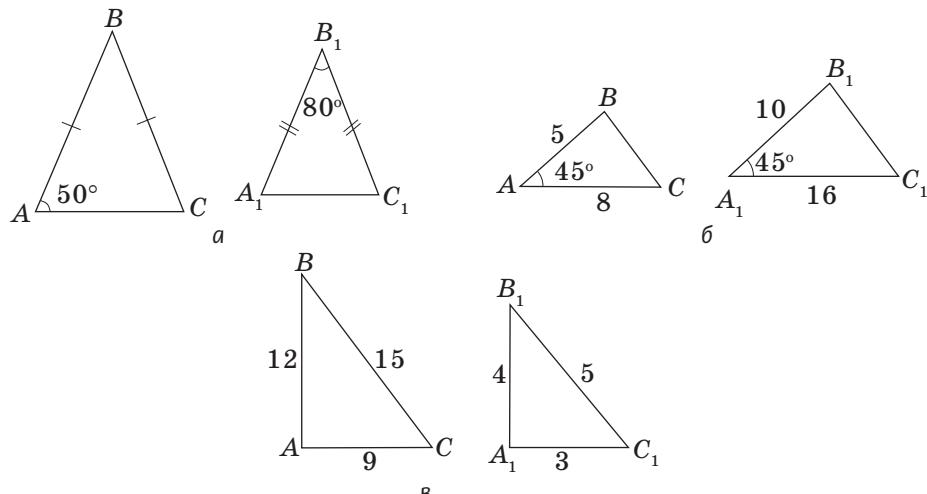


Рис. 108

360. Визначте відстань на місцевості від точки A до недосяжної точки B (рис. 109), якщо $CA = 60$ м, $CB = 90$ м, $CD = 20$ м, $CE = 30$ м, $DE = 40$ м. Здійсніть необхідні доведення.

361. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O .

а) Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.

б) Знайдіть AD , якщо $BC = 4$ см, $OB = 6$ см, $OA = 9$ см.

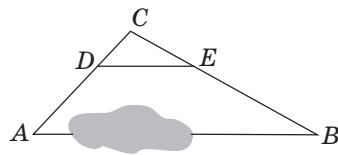


Рис. 109

362. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O .

а) Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle COB$.

б) Знайдіть BC , якщо $AD = 16$ см, $AO : OC = 4 : 3$.

363. Визначте, чи подібні трикутники зі сторонами:

а) 3, 4, 6 і 9, 15, 18;

б) 2, 3, 3 і 8, 12, 12.

364. Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути при основах. Основа одного трикутника дорівнює 8 см, а бічна сторона 6 см. Знайдіть периметр другого трикутника, якщо його основа дорівнює 4 см.

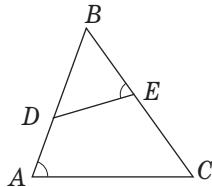
365. Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути, протилежні основам. Периметри цих трикутників дорівнюють відповідно 15 см і 10 см. Знайдіть сторони другого трикутника, якщо бічна сторона першого трикутника дорівнює 6 см.

366. Доведіть, що будь-які два рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

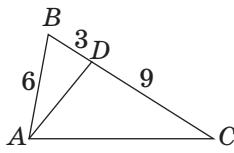
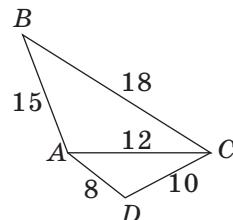
367. Доведіть, що відношення відповідних середніх ліній подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Рівень Б

368. На рис. 110 знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.

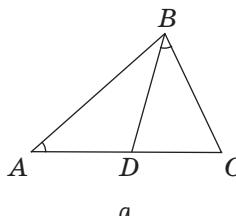


а

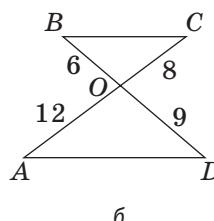
б
Рис. 110

в

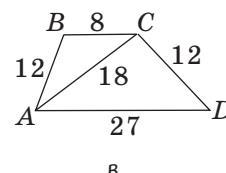
 **369.** На рис. 111 знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.



a



b



в

Рис. 111

370. У трикутник ABC вписано ромб $AKLM$ (рис. 112). Знайдіть периметр ромба, якщо $BK = 4$ см, $MC = 9$ см.

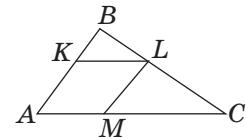


Рис. 112

371. Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні $3 : 7$. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.

 **372.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC кут B дорівнює 36° , AD — бісектриса трикутника. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle CAD$.

373. На одній стороні нерозгорнутого кута O відкладено відрізки $OA = 9$ см і $OB = 12$ см, а на іншій стороні — відрізки $OC = 6$ см і $OD = 18$ см. Чи подібні трикутники OAC і OBD ? Чи подібні трикутники OBC і ODA ?

374. Доведіть, що відношення відповідних медіан подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

 **375.** Доведіть, що відношення відповідних бісектрис подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

376. Через вершину найбільшого кута різностороннього трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Як зміниться відповідь, якщо в умові задачі розглянути іншу вершину трикутника? Проведіть дослідження.

 **377.** Через точку на стороні довільного трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Як зміниться відповідь, якщо в умові задачі замість довільного трикутника розглянути прямокутний? Проведіть дослідження.

Рівень В

378. Відрізок із кінцями на бічних сторонах трапеції паралельний її основам і проходить через точку перетину діагоналей. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо основи трапеції дорівнюють a і b .

 **379.** У трапеції через точку, яка ділить бічну сторону у відношенні $m:n$ починаючи від меншої основи, проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься всередині трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a < b$).

380 (опорна). Пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей трапеції і точку перетину продовжень її бічних сторін, ділить основи трапеції навпіл. Доведіть.

 **381.** Відрізок MN має кінці на сторонах AB і AC трикутника ABC і паралельний стороні BC . Доведіть, що медіана трикутника, проведена з вершини A , ділить цей відрізок навпіл.

 **382.** Через деяку вершину рівнобедреного трикутника проведено пряму, яка ділить даний трикутник на два нерівні рівнобедрені трикутники, один із яких подібний до даного. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

 **383.** Через точку всередині довільного трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Проведіть дослідження. Узагальніть у вигляді дослідження результати розв'язування задач № 376, 377, 382 і 383.



Повторення перед вивченням § 12

Теоретичний матеріал

- перпендикуляр до прямої;
- прямокутний трикутник.



7 клас, § 9, 17

Задачі

384. У прямокутному трикутнику кут між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи, дорівнює 20° . Знайдіть гострі кути трикутника.

385. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.

§ 12

Подібність прямокутних трикутників

12.1. Ознаки подібності прямокутних трикутників

Ознаки подібності прямокутних трикутників є наслідками з відповідних ознак подібності довільних трикутників. Найбільш важливою ознакою подібності прямокутних трикутників є така.

Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні.

Дійсно, оскільки в прямокутному трикутнику один кут прямий, ця ознака випливає з ознаки подібності трикутників за двома кутами.

Інші ознаки подібності прямокутних трикутників сформулюйте й доведіть самостійно (задачі 395, 413).

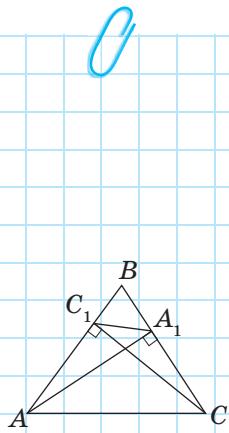


Рис. 113

Задача

У трикутнику ABC з гострим кутом B проведено висоти AA_1 і CC_1 (рис. 113). Доведіть, що $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

Розв'язання

Розглянемо прямокутні трикутники A_1BA і CBC_1 . Вони мають спільний гострий кут B , отже, подібні. Із цього випливає, що відповідні катети і гіпотенузи цих трикутників пропорційні, тобто $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$.

Розглянемо тепер трикутники A_1BC_1 і ABC . Вони також мають спільний кут B , а за щойно доведеним сторони, прилеглі до цього кута, пропорційні. Отже, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ за двома пропорційними сторонами і кутом між ними.

12.2. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

Подібність трикутників дозволяє встановити низку співвідношень між довжинами деяких відрізків у трикутнику і колі (такі співвідношення називають **метричними**). Спочатку введемо декілька допоміжних понять.

Відрізок x називається **середнім пропорційним** між відрізками a і b , якщо $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, тобто $x^2 = ab$.

У прямокутному трикутнику ABC з катетами $BC = a$ і $AC = b$ та гіпотенузою $AB = c$ проведемо висоту CD і позначимо її h_c (рис. 114). Відрізки AD і DB , на які ця висота ділить гіпотенузу, називають **проекціями катетів на гіпотенузу**. Проекції катетів a і b на гіпотенузу c позначають a_c і b_c відповідно.

Теорема (метричні співвідношення в прямокутному трикутнику)

У прямокутному трикутнику:

1) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c;$$

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу:

$$a^2 = c \cdot a_c \text{ і } b^2 = c \cdot b_c;$$

3) висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу:

$$h_c = \frac{ab}{c}.$$

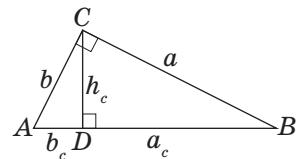


Рис. 114. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

Доведення

□ За ознакою подібності прямокутних трикутників $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (ці трикутники мають спільний гострий кут A), $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ (ці трикутники мають спільний гострий кут C) і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (гострі кути цих трикутників дорівнюють гострим кутам трикутника ABC).

Із подібності трикутників CBD і ACD маємо:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}, \text{ або } \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \text{ звідки } h_c^2 = a_c \cdot b_c.$$

Із подібності трикутників CBD і ABC маємо:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}, \text{ або } \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}, \text{ звідки } a^2 = c \cdot a_c.$$

Аналогічно з подібності трикутників ACD і ABC отримаємо $b^2 = c \cdot b_c$.

І нарешті, з подібності трикутників ACD

і ABC маємо: $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$, або $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{c}$, звідки $h_c = \frac{ab}{c}$.

Теорему доведено. ■

У ході доведення теореми ми встановили цікавий факт: *висота прямокутного трикутника ділить його на два подібні трикутники, кожен із яких подібний даному трикутнику*. Серед усіх видів трикутників таку властивість має лише прямокутний.

Задача

Знайдіть периметр прямокутного трикутника, в якому катет дорівнює 15 см, а його проекція на гіпотенузу дорівнює 9 см.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $AC = 15$ см, $AD = 9$ см (рис. 115).

За метричним співвідношенням у трикутнику ABC
 $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $15^2 = 9AB$, звідки $AB = 25$ см, тоді
 $DB = AB - AD = 16$ см. За співвідношенням $BC^2 = AB \cdot BD$
маємо: $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$, звідки $BC = 20$ (см). Отже,
 $P_{ABC} = 15 + 20 + 25 = 60$ (см).

Відповідь: 60 см.



Запитання і задачі



Усні вправи



386. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо:

- а) вони мають спільний кут;
- б) вони мають спільний гострий кут;
- в) один із них має кут 20° , а інший — кут 70° ;
- г) один із них має кут 50° , а катет другого вдвічі менший за гіпотенузу?

387. Чи може висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, бути меншою за кожну з проекцій катетів на гіпотенузу; дорівнювати проекції катета на гіпотенузу?

388. Відрізки a_c і b_c — проекції катетів a і b прямокутного трикутника на гіпотенузу. Порівняйте:

- а) a і b , якщо $a_c < b_c$;
- б) a_c і b_c , якщо $a > b$.

389. Чи можуть бути подібними нерівні прямокутні трикутники зі спільною гіпотенузою; зі спільним катетом?

390. Для побудови четвертого пропорційного відрізка $x = \frac{ab}{c}$ учень за- пропонував побудувати прямокутний трикутник із катетами a і b та гіпотенузою c і провести в ньому висоту h_c , яка дорівнюватиме x . Інший учень стверджує, що цей спосіб є хибним. Хто з учнів правий?



Графічні вправи

391. Накресліть прямокутний трикутник і проведіть його висоту з вершини прямого кута. Виділіть кольором проекції катетів на гіпотенузу і виміряйте їх довжини. Користуючись метричними співвідношеннями, обчисліть наближено:

- довжину проведеної висоти;
- довжини катетів.

Перевірте отримані результати вимірюванням.



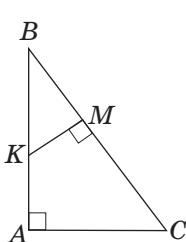
392. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB . Позначте на катеті AC точку M і проведіть до гіпотенузи перпендикуляр MN . Із точки N проведіть до катета AC перпендикуляр NK . Назвіть три трикутники, подібні трикутнику ABC , і запишіть їх подібність.



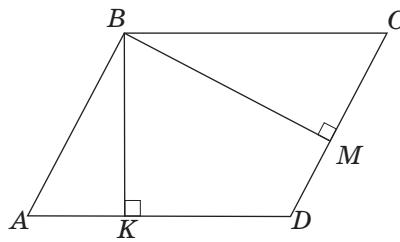
Письмові вправи¹

Рівень А

393. На рис. 116 знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.



a



б

Рис. 116

$ABCD$ — паралелограм

¹ Усі задачі параграфів 12–14 можуть бути розв’язані без застосування формули коренів квадратного рівняння. Відповідні задачі, які розв’язуються за допомогою квадратних рівнянь, подаються наприкінці розділу, в рубриці «Додаткові задачі».

 **394.** На рис. 117 знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.

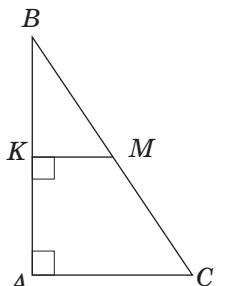
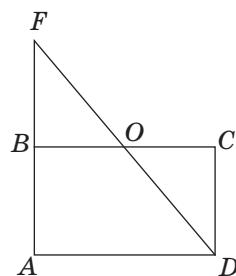
*a**b*

Рис. 117

ABCD — прямокутник

395. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності прямокутних трикутників за двома катетами.

396. Спостерігач, що перебуває в точці A , бачить кінець жердини B і верхню точку вежі D , причому точки A , B і D розміщені на одній прямій (рис. 118). Визначте висоту вежі, якщо $BC = 4$ м, $AC = 6$ м, $AE = 90$ м.

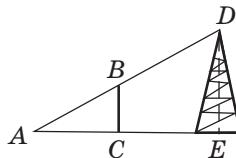


Рис. 118

 **397.** Висота дерева дорівнює 9,2 м, а довжина тіні людини, зріст якої 1,8 м, дорівнює 2,7 м. Знайдіть довжину тіні дерева.

398. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CD (див. рис. 114). Знайдіть:

- CD , якщо $AD = 4$ см, $DB = 25$ см;
- AC і BC , якщо $AB = 50$ см, $AD = 18$ см.



 **399.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4,5 см і 8 см.

400. Доведіть, що відношення відповідних висот подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Рівень Б

401. У прямокутний трикутник вписано квадрат (рис. 119).

- Знайдіть на рисунку подібні трикутники і доведіть їх подібність.
- Знайдіть сторону квадрата, якщо $BK = 9$ см, $MC = 4$ см.

402. Два кола з радіусами 4 см і 6 см дотикаються зовні. Їх спільна дотична, яка не проходить через точку дотику кіл, перетинає лінію центрів у точці A . Знайдіть відстані від точки A до центрів кіл.

403. Відрізки BK і BM — висоти паралелограма $ABCD$, проведені з вершини кута B до сторін AD і CD відповідно. Знайдіть BK , якщо $BM = 4$ см, $AD : CD = 2 : 3$.

404. Доведіть, що проекції катетів на гіпотенузу прямокутного трикутника відносяться як квадрати катетів: $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.

405. За даними рис. 114 подайте a_c та b_c через a , b і c .

406. Висота прямокутного трикутника дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16. Знайдіть катети трикутника.

407. Точка C ділить діаметр кола AB на відрізки $AC = 10$ см і $CB = 8$ см. Відрізок CD — перпендикуляр до AB . Визначте розміщення точки D відносно даного кола, якщо $CD = 9$ см.

408. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 2,25 см і 4 см. Знайдіть висоту трикутника, проведений до бічної сторони.

409. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 20 см і 5 см. Знайдіть висоту ромба.

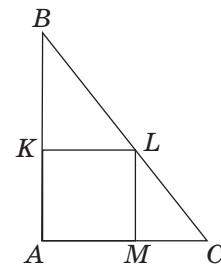


Рис. 119

Рівень В

410. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону у відношенні 1 : 7. У якому відношенні ця висота ділить діагональ паралелограма?

-  **411.** У паралелограмі $ABCD$ перпендикуляр AK , проведений до діагоналі BD , перетинає сторону BC в точці M . Знайдіть $BM : MC$, якщо $BK : KD = 3 : 7$. Чи зміниться відповідь, якщо K — довільна точка відрізка BD ?
- 412.** Відрізки AM і AN — висоти паралелограма $ABCD$, проведені до сторін BC і CD відповідно. Доведіть, що $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
-  **413.** Сформулюйте і доведіть ознаку подібності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.



Повторення перед вивченням § 13

Теоретичний матеріал

- прямокутний трикутник;
- співвідношення між сторонами трикутника.



7 клас, § 17, 18

Задачі

- 414.** Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні $1 : 4$. У скільки разів ця висота менша за гіпотенузу?
- 415.** Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 36° . Знайдіть кути, під якими катети видно з центра описаного кола.

§ 13

Теорема Піфагора та наслідки з неї

13.1. Теорема Піфагора

Сформулюємо і доведемо одну з найважливіших теорем геометрії — теорему Піфагора.

Теорема (Піфагора)

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доведення

□ Згідно з доведеними метричними співвідношеннями, в прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c (рис. 120) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

Додаючи ці рівності почленно, маємо: $a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$. Теорему доведено. ■

Співвідношення між катетами і гіпотенузою прямокутного трикутника було відоме ще задовго до Піфагора. Але саме Піфагорові вдалося довести його, спираючись на поняття площин (до цього доведення ми повернемось у наступному розділі). Усього ж нині відомо понад 150 способів доведення теореми Піфагора. З деякими з них ви зможете ознайомитися в п. 18.3.

Доведення, яке ми розглянули, є по суті алгебраїчним. Власне, важливість теореми Піфагора полягає, зокрема, в тому, що вона значно розширює можливості застосування алгебри в геометрії. За її допомогою можна знайти будь-яку сторону прямокутного трикутника, знаючи дві

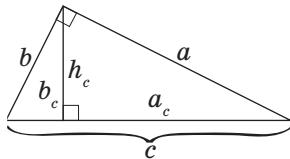


Рис. 120. До доведення теореми Піфагора



інші сторони. Наприклад, якщо $a = 5$, $b = 12$, то $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Якщо $c = 17$, $b = 15$, то $a = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17+15)(17-15)} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$.

Теорема Піфагора дозволяє використовувати для розв'язування геометричних задач й інші алгебраїчні прийоми, наприклад складання рівнянь.

Задача

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 20 см і 21 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до найбільшої сторони.

Розв'язання

Нехай BH — висота трикутника ABC , в якому $AB = 13$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см (рис. 121). Оскільки AC — найбільша сторона трикутника, то точка H лежить на цій стороні (доведіть це самостійно). Приймемо довжину відрізка AH за x см, тоді $HC = (21 - x)$ см. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABH маємо: $BH^2 = AB^2 - AH^2$, тобто $BH^2 = 13^2 - x^2$, а з прямокутного трикутника BCH маємо: $BH^2 = BC^2 - CH^2$, тобто $BH^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. Прирівнюючи два вирази для BH^2 , маємо:

$$169 - x^2 = 400 - (21 - x)^2;$$

$$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2;$$

$$42x = 210;$$

$$x = 5.$$

Таким чином, $AH = 5$ см.

Тоді з трикутника ABH за теоремою Піфагора $BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

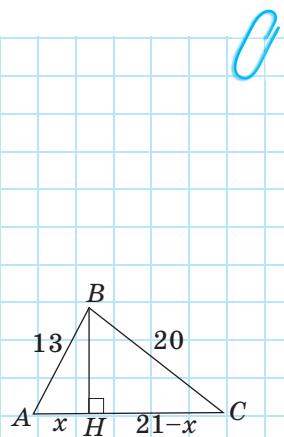


Рис. 121

Відповідь: 12 см.

13.2. Теорема, обернена до теореми Піфагора

Не менш важливою, ніж теорема Піфагора, є обернена теорема. Цю теорему можна розглядати як ознаку прямокутного трикутника.

Теорема (обернена до теореми Піфагора)

Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутним:

якщо $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC (рис. 122, а) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Доведемо, що кут C прямий. Розглянемо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з прямим кутом C_1 , у якому $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 122, б). За теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а з урахуванням рівностей двох сторін розглядуваних трикутників $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$ за трьома сторонами, звідки $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. ■

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Про це знали ще давні єгиптяни: для побудови прямих кутів на місцевості вони ділили мотузку на 12 рівних частин, зв'язували її кінці, а потім за допомогою кілків натягували її так, щоб одержати прямокутний трикутник. Саме тому прямокутні трикутники зі сторонами, пропорційними числам 3, 4 і 5, називають **єгипетськими трикутниками**. Узагалі, трійки натуральних чисел a , b , c , для яких справджується рівність $a^2 + b^2 = c^2$, прийнято називати **піфагоровими трійками**, а трикутники, довжини сторін яких є піфагоровими трійками, — **піфагоровими трикутниками**. Спробуйте самостійно скласти декілька піфагорових трійок чисел (допоможе в цьому розв'язання задачі № 443).

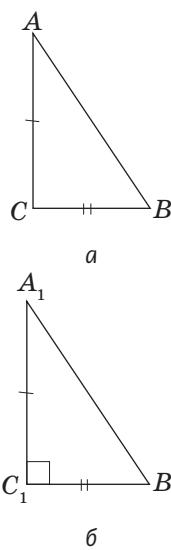


Рис. 122. До доведення теореми, оберненої до теореми Піфагора



13.3. Перпендикуляр і похила

Нехай точка A не лежить на прямій a , AB — перпендикуляр до цієї прямої (рис. 123). Будь-який відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a і не збігається з перпендикуляром, називають **похилою** до прямої a , точка C — основа похилого. При цьому відрізок BC прямої a , обмежений основами перпендикуляра і похилого, називають **проекцією похилого** AC на дану пряму.

Поняття похилого та її проекції взаємопов'язані з поняттям перпендикуляра до прямої: неможливо вказати проекцію даної похилого, не побудувавши перпендикуляра. Очевидно, що *перпендикуляр і похила, проведені з однієї точки, разом із проекцією похилого утворюють прямокутний трикутник, у якому похила є гіпотенузою*.

Сформулюємо властивості перпендикуляра, похилих і проекцій.

Нехай з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:

- 1) будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проекцію на дану пряму (рис. 124, а);
- 2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі (рис. 124, б);
- 3) більша похила має більшу проекцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проекцію (рис. 124, в).

Усі ці властивості випливають з теореми Піфагора (самостійно поясніть чому). Але деякі з них можна також отримати і з інших властивостей прямокутного трикутника.

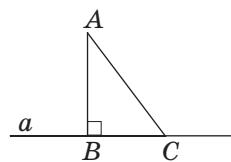


Рис. 123. Перпендикуляр і похила

Проекція — від латинського «проекцію» — кидання вперед

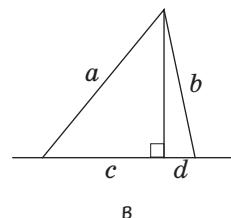
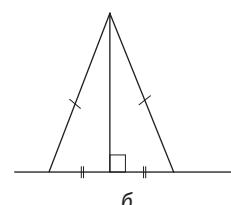
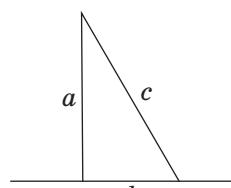


Рис. 124. Властивості похилих



Запитання і задачі

Усні вправи

- 416.** Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника удвічі більший за квадрат катета. Чому дорівнюють гострі кути трикутника?
- 417.** Яку градусну міру має найбільший кут трикутника зі сторонами 6, 8 і 10? Чому?
- 418.** Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а діагональ 5 см. Визначте вид паралелограма.
- 419.** У трикутнику ABC $\angle A = 90^\circ$. Назвіть:
- похилу до прямої AB , проведену з точки C ;
 - проекцію похилої BC на пряму AC .
- 420.** Відрізки a_1 і a_2 — проекції похилих l_1 і l_2 , проведених з однієї точки до однієї прямої. Порівняйте:
- l_1 і l_2 , якщо $a_1 < a_2$;
 - a_1 і a_2 , якщо $l_1 = l_2$.
- 421.** Дві похилі до однієї прямої мають рівні проекції. Чи обов'язково ці похилі рівні?
- 422.** Скільки рівних похилих до даної прямої можна провести з точки, яка не лежить на цій прямій?



Графічні вправи

- 423.** Накресліть прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Обчисліть за теоремою Піфагора довжину його гіпотенузи. Перевірте отриманий результат вимірюванням.
- 424.** Побудуйте трикутник зі сторонами 2,5 см, 6 см і 6,5 см. Виміряйте найбільший кут трикутника. Обґрунтуйте отриманий результат за допомогою теореми, оберненої до теореми Піфагора.



Письмові вправи

Рівень А

- 425.** У прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c знайдіть:
- c , якщо $a = 7$, $b = 24$;
 - a , якщо $b = 3\sqrt{3}$, $c = 6$;
 - b , якщо $a = \sqrt{17}$, $c = 9$;

426. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть довжину:

- похилої, якщо її проекція дорівнює 9 см, а перпендикуляр має довжину 40 см;
- перпендикуляра, якщо похила та її проекція дорівнюють відповідно 29 см і 20 см.

 **427.** У прямокутнику знайдіть:

- діагональ, якщо сторони дорівнюють 10 см і 24 см;
- периметр, якщо діагональ дорівнює 10 см, а одна зі сторін 6 см.

428. У рівнобедреному прямокутному трикутнику знайдіть:

- гіпотенузу, якщо катет дорівнює: 4 см; $2\sqrt{2}$ см; a см;
- катет, якщо гіпотенуза дорівнює: 10 см; $\sqrt{2}$ см; c см.

 **429.** У квадраті знайдіть:

- діагональ, якщо сторона дорівнює a ;
- сторону, якщо діагональ дорівнює d .

430. Визначте, чи є прямокутним трикутник зі сторонами:

- 4, 5, 6;
- 5, 12, 13;
- $2, \sqrt{7}, \sqrt{13}$;
- $6, 8, \sqrt{10}$.

 **431.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см. Який кут утворює з найменшою стороною бісектриса найбільшого кута?

432. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 6 см.

 **433.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до основи.

434. Діагоналі паралелограма дорівнюють 16 см і 30 см, а сторона — 17 см. Доведіть, що цей паралелограм є ромбом.

 **435.** Знайдіть периметр ромба з діагоналями 10 м і $2\sqrt{11}$ м.

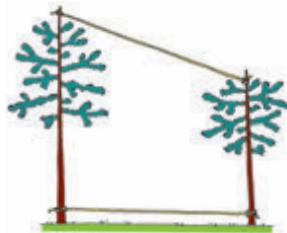
Рівень Б

436. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть довжину третьої сторони. Скільки розв'язків має задача?

437. У прямокутному трикутнику знайдіть невідомі сторони, якщо:

- катети відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 45 см;
- висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу має довжину 16 см.

- 438.** У прямокутному трикутнику знайдіть невідомі сторони, якщо:
- катет і гіпотенуза відносяться як $12 : 13$, а другий катет дорівнює 10 см;
 - проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 18 см і 32 см.
- 439.** У рівносторонньому трикутнику знайдіть:
- висоту, якщо сторона дорівнює: 6 см; $2\sqrt{3}$ см; a см;
 - сторону, якщо висота дорівнює: 1 см; $3\sqrt{3}$ см; h см.
- 440.** Знайдіть висоту ромба, яка виходить з вершини тупого кута, якщо вона ділить сторону на відрізки завдовжки 6 см і 4 см починаючи від вершини гострого кута.
- 441.** Висота рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см починаючи від основи. Знайдіть основу трикутника.
- 442.** Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 20 см і 25 см. Знайдіть медіану і висоту, проведені до найбільшої сторони.
- 443.** Якщо m і n — натуральні числа, то числа $2mn$, $m^2 - n^2$ і $m^2 + n^2$ складають піфагорову трійку. Доведіть.
- 444.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см, а висота 12 см. Знайдіть периметр трапеції. Чи можна вписати в неї коло?
- 445.** Висота однієї сосни дорівнює 21 м, іншої — 28 м. Відстань між основами цих сосен становить 24 м. Знайдіть відстань між верхівками сосен.
- 446.** З точки до прямої проведено перпендикуляр завдовжки 8 см і дві похилі з довжинами 10 см і 17 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
- 447.** Знайдіть висоту, проведену до найбільшої сторони трикутника зі сторонами:
- 15, 41 і 52;
 - 10, 17 і 21.
- 448.** З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі, різниця довжин яких складає 8 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо проекції похилих дорівнюють 8 см і 20 см.
- 449.** Точка кола віддалена від кінців діаметра на 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від даної точки до діаметра.



-  **450.** На колі позначено точки A , B і C так, що $AB = 9$ см, $BC = 40$ см, $AC = 41$ см. Знайдіть радіус кола.

Рівень В

- 451.** Два кола з радіусами 4 см і 9 см дотикаються зовні. Знайдіть відстань між точками дотику спільної дотичної до цих кіл.
-  **452.** Два кола дотикаються зовні. Відстані від точки дотику A цих кіл до точок B і C дотику даних кіл з їх спільною зовнішньою дотичною дорівнюють відповідно 5 см і 12 см. Знайдіть BC .
- 453.** Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні і дорівнюють 1 м і $\sqrt{3}$ м. Знайдіть середню лінію трапеції.
-  **454.** Медіана і висота, проведені до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнюють відповідно 25 см і 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.
-  **455.** Доведіть, що квадрат висоти рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку її основ.
-  **456.** Якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то суми квадратів довжин його протилежних сторін рівні. Доведіть. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.



Повторення перед вивченням § 14

Теоретичний матеріал

- дотична до кола;
- геометричні місця точок.



7 клас, § 20, 22

Задачі

- 457.** На катеті AB прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90^\circ$) позначено точку K . Відрізок KM — перпендикуляр до гіпотенузи BC , причому $KM = AK$. Доведіть, що CK — бісектриса трикутника ABC .
- 458.** У гострокутному трикутнику ABC $AB > BC$, BD — висота трикутника. Порівняйте довжини відрізків AD і DC . Чи зміниться відповідь, якщо BD — бісектриса трикутника? Висловіть припущення.

§ 14

Застосування подібності трикутників

14.1. Властивість бісектриси трикутника

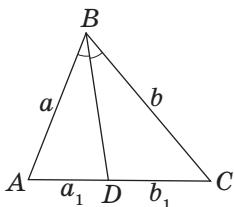


Рис. 125. Властивість бісектриси трикутника

Теорема (властивість бісектриси трикутника)

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

За позначеннями рис. 125 це означає, що

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}.$$

Доведення

□ Нехай BD — бісектриса трикутника ABC .

Доведемо, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

У випадку, коли $AB = BC$, твердження теореми очевидне, оскільки бісектриса BD одночасно є медіаною. Розглянемо випадок, коли $AB \neq BC$.

Проведемо перпендикуляри AE і CF до прямої BD (рис. 126). Прямокутні трикутники ADE і CDF подібні, оскільки їх гострі кути при вершині D рівні як вертикальні. Із подібності цих трикутників маємо: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}$. З іншого боку, прямокутні трикутники ABE і CBF також подібні, оскільки мають рівні гострі кути при вершині B . Звідси випливає, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CF}$. Порівнюючи цю рівність із передньою, отримуємо: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, що й треба було довести. ■

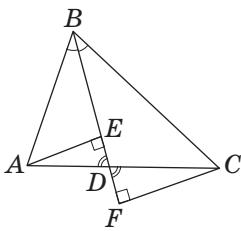


Рис. 126. До доведення властивості бісектриси трикутника

Запропонуйте спосіб побудови бісектриси трикутника на основі її властивості.

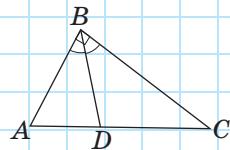
Задача

0

Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо його бісектриса ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см.

Розв'язання

Нехай BD — бісектриса прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AC , $AD = 15$ см, $DC = 20$ см (рис. 127).



За властивістю бісектриси трикутника $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, тобто $AB : BC = 15 : 20 = 3 : 4$. Тоді, якщо $AB = 3x$ см, то $BC = 4x$ см, і за теоремою Піфагора маємо:

Рис. 127

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2;$$

$$25x^2 = 1225;$$

$$x = 7.$$

Отже, $AB = 21$ см, $BC = 28$ см, $AC = 35$ см, тоді $P_{ABC} = 84$ см.

Відповідь: 84 см.

14.2*. Метричні співвідношення у колі

Теорема (про пропорційність відрізків хорд)

Добутки відрізків хорд, що перетинаються, рівні.

За позначеннями рис. 128 це означає, що $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Доведення

□ Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці M . Проведемо хорди AC і BD . Трикутники ACM і DBM подібні за двома кутами: $\angle C = \angle B$ як вписані кути, що спираються на ту саму дугу, а кути при вершині M рівні як вертикальні.

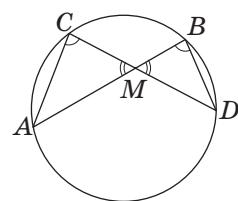


Рис. 128. До доведення пропорційності відрізків хорд

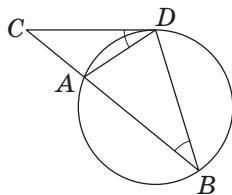


Рис. 129. До доведення пропорційності відрізків січної і дотичної

З подібності трикутників випливає, що $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, тобто $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. ■

Теорема (про пропорційність відрізків січної і дотичної)

Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки.

За позначеннями рис. 129 це означає, що $CB \cdot CA = CD^2$.

Доведення

□ Нехай з точки C до кола проведено січну, яка перетинає коло в точках A і B , та дотичну CD (D — точка дотику). Проведемо хорди AD і BD . Трикутники BCD і DCA подібні за двома кутами: вони мають спільний кут C , а кути CBD і CDA обидва вимірюються половиною дуги AD (див. опорну задачу № 230). Отже, з подібності трикутників маємо $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$, тобто $CB \cdot CA = CD^2$. ■

Наслідок

Добуток однієї січної на її зовнішню частину дорівнює добутку іншої січної на її зовнішню частину, якщо ці січні проведені з однієї точки поза колом.

За позначеннями рис. 130 це означає, що $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

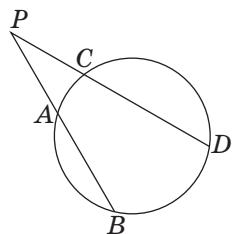


Рис. 130. Пропорційність відрізків січних

14.3.* Метод подібності

Подібність трикутників дає ключ до розв'язання задач на доведення та обчислення, які містять співвідношення між добутками деяких відрізків. Для цього відповідні рівності перетворюють на пропорції, завдяки яким можна довести подібність відповідних трикутників.

Задача

Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O , $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання

Перепишемо дану рівність у вигляді пропорції $\frac{BO}{CO} = \frac{DO}{AO}$. Елементи цієї пропорції є відповідними сторонами трикутників BOC і DOA (рис. 131). Оскільки $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні, то ці трикутники подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними, тому $\angle CBO = \angle ADO$. Але кути CBO і ADO внутрішні різносторонні при прямих CB і AD та січній BD . Отже, за ознакою паралельності прямих $BC \parallel AD$.

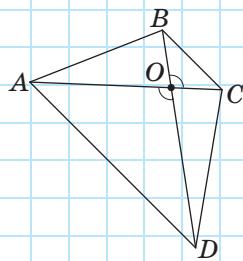


Рис. 131

Подібність трикутників може використовуватись не тільки як інструмент геометричних доведень чи обчислень, але й як засіб для розв'язування задач на побудову. Метод подібності для розв'язування задач на побудову полягає в побудові допоміжної фігури, подібної шуканій.

Задача

Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.

Розв'язання**Аналіз**

Звернемо увагу на те, що два дані кути (нехай вони дорівнюють α і β) визначають форму шуканого трикутника, а довжина даної бісектриси (нехай вона дорівнює l) — його розміри. При цьому шуканий трикутник буде подібним будь-якому трикутнику з кутами α і β . Звідси випливає план побудови: будуємо спочатку довільний трикутник з кутами α і β , проводимо



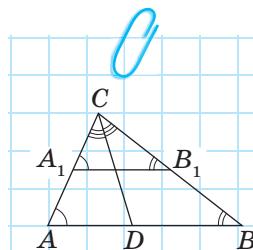


Рис. 132

в ньому бісектрису та, користуючись подібністю трикутників, будуємо шуканий трикутник (рис. 132).

Побудова

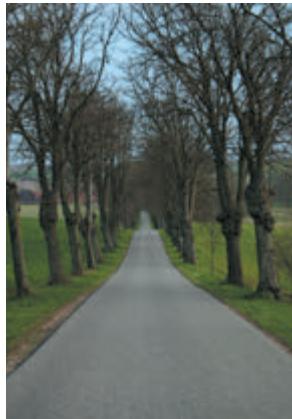
1. Побудуємо трикутник A_1B_1C , у якому $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$.
2. Побудуємо бісектрису кута C .
3. Відкладемо на побудованій бісектрисі відрізок $CD = l$.
4. Проведемо через точку D пряму, паралельну A_1B_1 . Нехай A і B — точки її перетину зі сторонами кута C . Трикутник ABC є шуканим.

Доведення

Оскільки за побудовою $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ як відповідні кути при паралельних прямих. Отже, в трикутнику ABC CD — бісектриса і $CD = l$ за побудовою, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок за умови $\alpha + \beta < 180^\circ$ і жодного, якщо $\alpha + \beta \geqslant 180^\circ$.



Отже, під час розв'язування задач на побудову *методом подібності* варто дотримуватись такого плану.

1. Виділити з умов задачі ті, що визначають форму шуканої фігури.
2. Побудувати за цими даними фігуру, подібну шуканій.
3. Використовуючи умови задачі, які визначають розміри шуканої фігури, побудувати цю фігуру.

Серед задач на побудову, пов'язаних із подібністю, однією з найбільш цікавих є задача поділу відрізка на дві частини так, щоб одна з них була середнім пропорційним між другою частиною і всім відрізком. Такий поділ відрізка називають *поділом у середньому і крайньому відношенні*, або *золотим перерізом*. Докладніше про такий поділ ви можете дізнатися в Додатку 2.

Запитання і задачі



Усні вправи

- 459.** Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону у відношенні $1 : 2$. Чи можуть кути, прилеглі до цієї сторони, бути рівними? Чому?
- 460.** Чи може бісектриса рівнобедреного трикутника ділити бічну сторону у відношенні $2 : 1$ починаючи від основи? Якій теоремі це суперечить?



Графічні вправи

- 461.** Накресліть трикутник ABC і проведіть його бісектрису BD . Виміряйте відрізки AB , AD і DC . За допомогою властивості бісектриси трикутника обчисліть довжину сторони BC . Перевірте отриманий результат вимірюванням.
- 462.** Побудуйте трикутник ABC зі сторонами $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Позначте на стороні BC точку D так, щоб $BD = 3$ см. Сполучіть точки A і D . Виміряйте кути BAD і CAD . Обґрунтуйте отриманий результат.



Письмові вправи

Рівень А

- 463.** Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть:
- AB , якщо $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DC = 2$ см;
 - AD і DC , якщо $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $AC = 10$ см.
- 464.** Бісектриса рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 2 см і 4 см, починаючи від основи трикутника. Знайдіть основу трикутника.
- 465.** Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть сторони трикутника, якщо $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 45 см.
- 466.** Бісектриса прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 5 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо відношення катетів дорівнює $3 : 4$.
- 467.** Бісектриса прямокутного трикутника ділить його катет на відрізки завдовжки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

Рівень Б

468. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 16,5 см і 27,5 см. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса ділить бічну сторону трикутника.

◆ **469.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 6. Бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

470. У результаті перетину двох хорд одна з них ділиться на відрізки завдовжки 6 см і 16 см, а друга — у відношенні 3 : 2. Знайдіть довжину другої хорди.

◆ **471.** У результаті перетину хорди з діаметром кола хорда ділиться на відрізки завдовжки 3 см і 4 см, а діаметр — у відношенні 1 : 3. Знайдіть радіус кола.

472. Січна, проведена з точки A , перетинає коло в точках B і C , причому $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка дотичної, проведеної до кола з точки A .

◆ **473.** З точки поза колом, віддаленої від центра кола на 39 см, проведено дотичну до кола. Знайдіть радіус кола, якщо відрізок дотичної дорівнює 36 см.

Рівень В

474. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см. Точка на цьому катеті віддалена від гіпотенузи й іншого катета на 8 см. Знайдіть периметр трикутника.

◆ **475.** Точка на катеті прямокутного трикутника рівновіддалена від другого катета й гіпотенузи. Перпендикуляр, проведений із даної точки до гіпотенузи трикутника, ділить її на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

476. У трикутнику ABC для висоти CD і відрізків AD і BD , на які вона ділить сторону AB , виконується співвідношення $CD^2 = AD \cdot BD$. Доведіть, що кут ACB прямий.

◆ **477.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC до сторони BC проведено висоту AD . Доведіть, що $2DC \cdot BC = AC^2$.

478. Побудуйте трикутник:

- за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута;
- за кутом, бісектрисою цього кута і відношенням сторін, які утворюють даний кут.

-  **479.** Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини меншого з них.



Повторення перед вивченням § 15

Теоретичний матеріал

- означення трикутника;
- сума кутів трикутника;
- чотирикутник і його елементи.

 7 клас, § 7, 16

 8 клас, § 1

Задачі

- 480.** Доведіть, що периметр паралелограма більший за суму довжин його діагоналей.

- 481.** Два кути трикутника дорівнюють 10° і 70° . Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини третього кута.



Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 3

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 3

1. За рис. 133 доведіть подібність трикутників ABE і DCE , якщо $AB \parallel CD$.
2. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а одна із сторін — 5 см. Знайдіть діагональ прямокутника.
3. Сторони трикутника пропорційні числам 21, 20 і 29. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.
4. Із точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі завдовжки 17 см і 10 см. Проекції похилих відносяться як $2 : 5$. Знайдіть довжину перпендикуляра.
5. У прямокутному трикутнику бісектриса ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. На які відрізки ділить гіпотенузу висота трикутника?
6. У колі проведено дві рівні хорди, що перетинаються. Доведіть, що відрізки першої хорди відповідно дорівнюють відрізкам другої хорди.

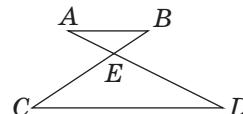
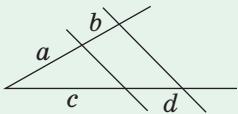


Рис. 133

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ II

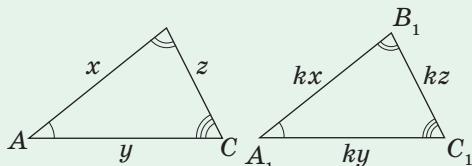
ТЕОРЕМА ПРО ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ



Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

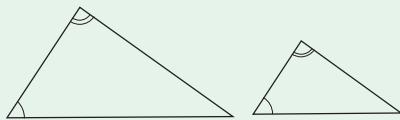
ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



Два трикутники називаються **подібними**, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні

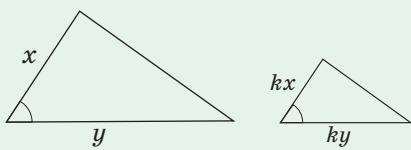
ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

За двома кутами



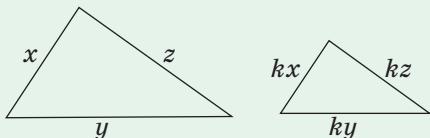
Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники подібні

За двома сторонами і кутом між ними



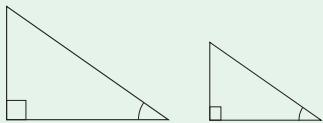
Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні

За трьома сторонами



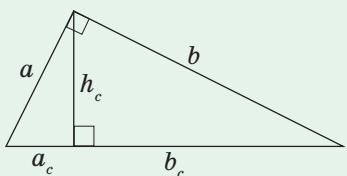
Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трем сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні

Ознака подібності прямокутних трикутників



Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



Висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу:

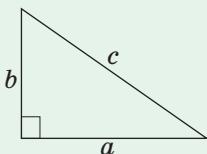
$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$ і $b^2 = c \cdot b_c$

Висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу:
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА ТА НАСЛІДКИ З НЕЇ

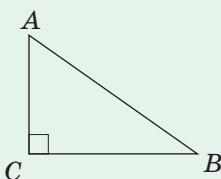
Теорема Піфагора



У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема, обернена до теореми Піфагора



Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутним:

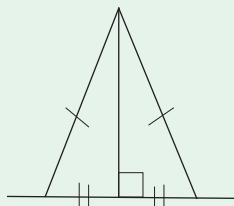
якщо $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛОЇ

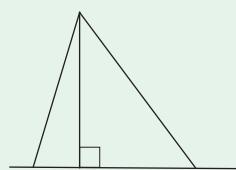


Нехай з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:

- будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проекцію на дану пряму

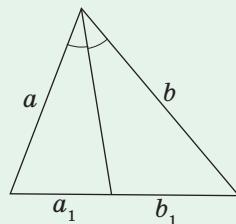


- рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі



- більша похила має більшу проекцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проекцію

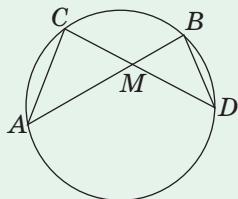
ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА



Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам:

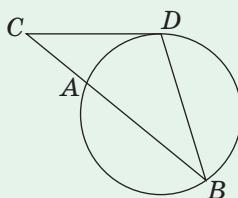
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$$

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У КОЛІ



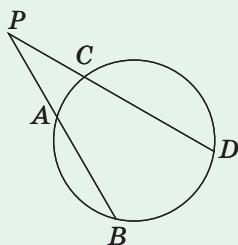
Добутки відрізків хорд, що перетинаються, рівні:

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки:

$$CB \cdot CA = CD^2$$



Добуток однієї січної на її зовнішню частину дорівнює добутку іншої січної на її зовнішню частину, якщо ці січні проведені з однієї точки поза колом:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Контрольні запитання до розділу II

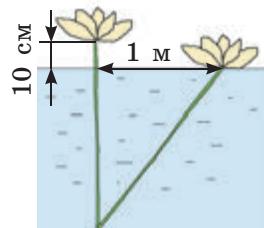
1. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
2. Дайте означення подібних трикутників.
3. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома кутами.
4. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
5. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.
6. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
7. Сформулюйте і доведіть метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.
8. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
9. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора.
10. Сформулюйте властивості перпендикуляра та похилих, проведених з однієї точки до прямої.
11. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.



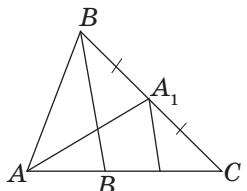
Додаткові задачі до розділу II

- 482.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 6, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 5. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 483.** Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а діагональ — 17 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 484.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 16 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 4 см.
- 485.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см. Знайдіть катети трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.
- 486.** Периметр трикутника дорівнює 27 см. Обчисліть його сторони, якщо бісектриса ділить одну з них на відрізки завдовжки 4 см і 5 см.
- 487.** Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 1 м, а різниця основ складає 14 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трапецію.
- 488.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 32 см. Точка, що лежить на цьому катеті, віддалена від кінців гіпотенузи на 25 см. Знайдіть периметр трикутника.

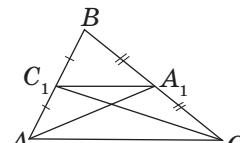
- 489.** Квітка водяної лілії виступає над поверхнею озера на 10 см. Якщо квітку потягнути убік, то вона торкнеться поверхні води на відстані 1 м від початкового положення. Знайдіть глибину озера у даному місті.



- 490.** Користуючись рис. 134, а, б, доведіть теорему про точку перетину медіан трикутника ще двома способами.



а



б

Рис. 134

- 491.** На рис. 135 відрізок BD — бісектриса трикутника ABC , $CM \parallel BD$. Користуючись цим рисунком і теоремою про пропорційні відрізки, доведіть властивість бісектриси трикутника.

- 492.** На рис. 136 CM — бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC , $BD \parallel CM$. Користуючись цим рисунком і теоремою про пропорційні відрізки, доведіть, що $AM : BM = AC : BC$.

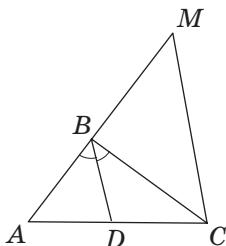


Рис. 135

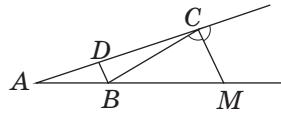


Рис. 136

- 493.** Побудуйте трикутник за кутом, медіаною, проведеною з його вершини, і відношенням сторін, прилеглих до даного кута.

Задачі підвищеної складності

494. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC позначено точки A_1 і B_1 відповідно. Відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O . Знайдіть:

- $AO : A_1O$, якщо $AB_1 : B_1C = 2 : 1$, $BA_1 = A_1C$;
- $BA_1 : A_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $AB_1 : B_1C = 2 : 1$;
- $BA_1 : A_1C$ і $AB_1 : B_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $BO : OB_1 = 7 : 8$.

495. У трикутнику ABC медіана AM ділить висоту BH у відношенні $3 : 1$ починаючи від вершини B . У якому відношенні ця висота ділить цю медіану?

496. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 12 см. Середини кожної з основ сполучені з кінцями іншої основи. Знайдіть відстань між точками перетину проведених відрізків.

497. У рівносторонній трикутник вписано квадрат таким чином, що дві його вершини лежать на одній стороні трикутника, а дві інші — на двох інших сторонах трикутника. Знайдіть відношення периметрів трикутника і квадрата.

498. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$). Через точку перетину продовжень бічних сторін проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між продовженнями діагоналей.

499. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 54 см. До бічних сторін проведено висоти. Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є основи цих висот.

500. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника в 5 разів менший за суму квадратів двох інших медіан.

501. Три кола з радіусами 1, 2 і 3 дотикаються одне до одного зовні. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри цих кіл, і радіус кола, яке проходить через точки їх дотику.

502. Усередині прямокутника $ABCD$ позначено точку M , причому $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Знайдіть MD .

503. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до даних точок A і B є сталою, якщо точки A і B належать цій множині.

504 (теорема Птолемея). Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків двох пар протилежних сторін: $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$ (рис. 137). Доведіть.

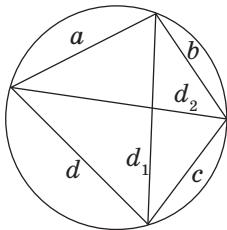


Рис. 137

505 (опорна). Квадрат бісектриси трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків, на які ця бісектриса ділить основу: $l_c^2 = ab - mn$ (рис. 138). Доведіть.

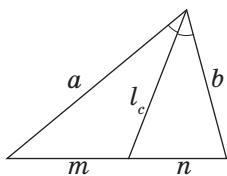


Рис. 138



Відеоматеріали за розділом II

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Теорії подібності трикутників присвячений шостий розділ «Начал» Евкліда. Цікаво, що, наприклад, у геометрії Лобачевського не існує подібних трикутників, які не були б рівними. Виявляється, що аксіома паралельних прямих в евклідовій геометрії рівносильна припущення про існування подібних, але не рівних трикутників.

Центральне місце в евклідовій геометрії посідає теорема Піфагора. Піфагор Самоський (бл. 580–500 рр. до н. е.) тривалий час прожив у Єгипті й Вавилоні, потім оселився в місті Кротон (грецькій колонії на півдні Італії) і заснував так званий піфагорійський союз. Важається, що саме від піфагорійців іде слово «математика» (грецьке «матема» означає «наука», «пізнання»).

Властивості трикутника зі сторонами 3, 4 і 5 були відомі давнім єгиптянам і китайським ученим. Піфагор почав досліджувати інші прямокутні трикутники із ціличисельними сторонами. Розглянувши рівнобедрений



прямокутний трикутник з одиничними катетами, він побачив, що довжина його гіпотенузи не виражається цілим числом — так було відкрито іrrаціональні числа. Згодом Піфагору вдалося довести, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі — саме так виглядала теорема Піфагора в класичному формулюванні. За легендою, на честь свого відкриття він приніс богам у жертув сто биків.

Сьогодні достеменно невідомо, які з відкриттів піфагорійців належать самому Піфагорові, а які — його учням. Узагалі, школа Піфагора існувала достатньо закрито й відокремлено від громади. Це породило ненависть до піфагорійців, і школу було розгромлено, а сам Піфагор мусив утекти і в дорозі був убитий. Після смерті Піфагора його учні розбрелися по всій Греції і стали поширювати його вчення, яке дійшло й до наших днів.



Піфагор



Піфагорійський союз був одночасно і філософською школою, і науковим товариством, і релігійним братством, і навіть політичною партією. Дослідження піфагорійців охоплювали й арифметику, і філософію, і музику, і астрономію.



Видатні математики України



Глущков Віктор Михайлович (1923–1982)

Інформаційні технології (скороочено ІТ, вимовляється з англійською «ай-ті») — це все, що пов’язане з опрацюванням, зберіганням та передаванням інформації. Хто сьогодні не чув про ІТ? Навіть малюки вже легко справляються з мобільними телефонами, ноутбуками, планшетами, щоб подивитись улюблений мультфільм. Але не всі замислюються над тим, що, заходячи в Інтернет і дивлячись новини, прогноз погоди, електронну пошту, інтерактивний урок

тощо, вони мають справу з ІТ. І майже ніхто, крім фахівців, не знає, що видатний учений Віктор Михайлович Глущков є одним з основоположників ІТ, творцем багатопроцесорних макроконвеєрних суперкомп’ютерів, організатором Інституту кібернетики Академії наук України, генієм, що випередив час.

Віктор Михайлович був серйозним науковцем-алгебраїстом, тому до створення кібернетики ставився саме з наукових позицій. Він чітко усвідмлював, що тільки на підґрунті науки комп’ютери стануть дійсно великим надбанням людства. Недарма ж для написання статті про кібернетику в американській енциклопедії «Британіка» (1973 р.) було запрошено саме віце-президента Української академії наук Глущкова. Віктор Михайлович опублікував понад 800 друкованих робіт, і перша у світі «Енциклопедія кібернетики» вийшла саме за його редакцією в 1974 р.

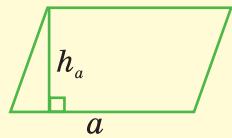
У своїй останній пророчій роботі «Основи безпаперової інформатики» вчений передбачав: «Уже недалекий той день, коли зникнуть звичайні книги, газети, журнали. Натомість кожна людина буде носити із собою «електронний» блокнот, що є комбінацією плоского дисплея з мініатюрним радіопередавачем». Це було понад тридцять років тому!

Великий український вчений Б. Є. Патон сказав, що ім’я академіка Глущкова невіддільне від створення в нашій країні кібернетичної індустрії. Тому природно, що на честь академіка Глущкова названий один з найкрасивіших проспектів Києва.

Завдяки ІТ всі, кого зацікавила надзвичайна біографія міжнародно визнаного піонера комп’ютерізації, зможуть знайти додаткову інформацію про В. М. Глущкова в мережі Інтернет.

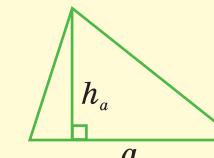
Площі многокутників

Паралелограм



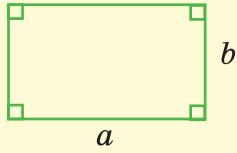
$$S = ah_a$$

Трикутник



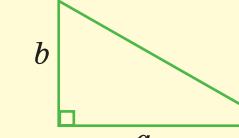
$$S = \frac{ah_a}{2}$$

Прямоугольник



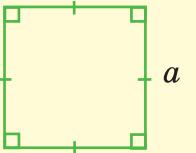
$$S = ab$$

Прямоугольний трикутник



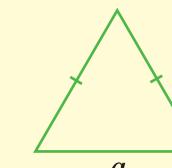
$$S = \frac{ab}{2}$$

Квадрат



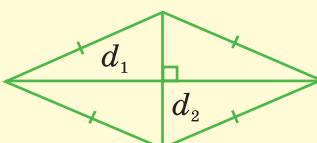
$$S = a^2$$

Рівносторонній трикутник



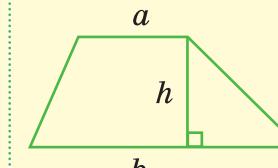
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Ромб



$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Трапеція



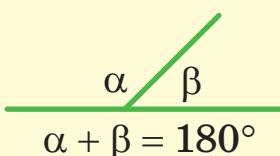
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Таблиця квадратів чисел від 10 до 99

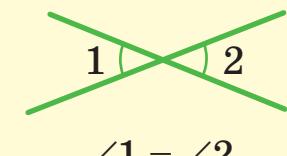
Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Прямі і кути

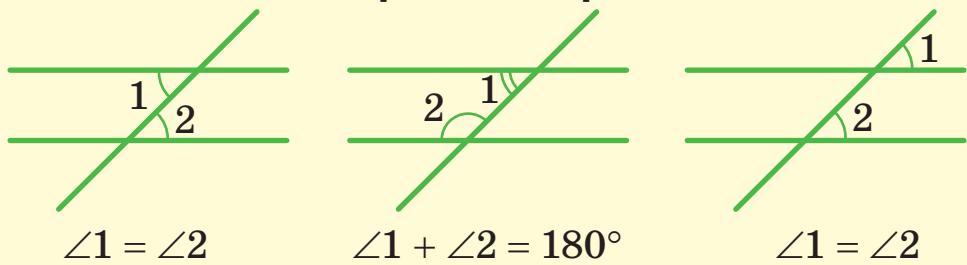
Суміжні кути



Вертикальні кути

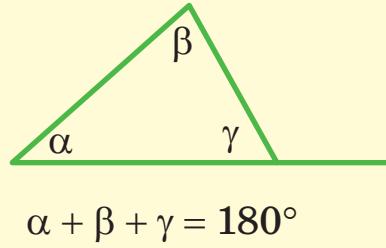


Паралельні прямі

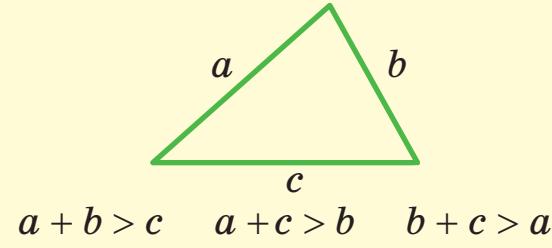


Трикутники

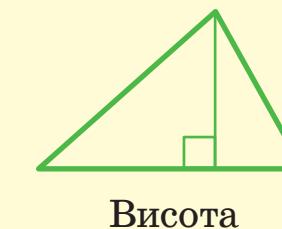
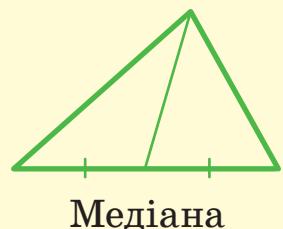
Сума кутів трикутника



Нерівність трикутника

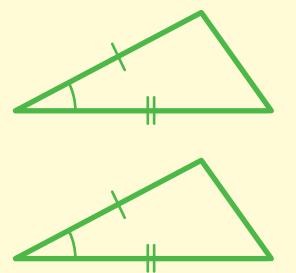


Визначні лінії в трикутнику



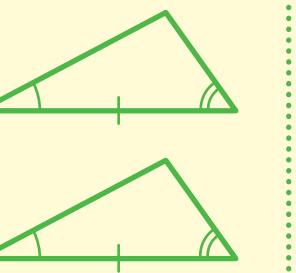
Ознаки рівності трикутників

Перша



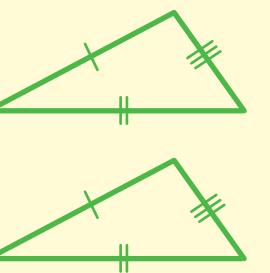
За двома
сторонами й кутом
між ними

Друга



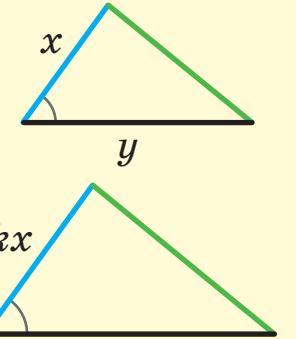
За стороною
і прилеглими
до неї кутами

Третя

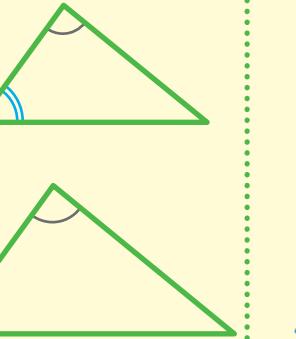


За трьома
сторонами

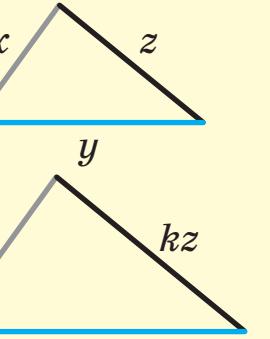
Ознаки подібності трикутників



За двома
сторонами й кутом
між ними



За двома
кутами



За трьома
сторонами